

複素関数論とその物理への応用 (2023)

Masaru Hongo,^{a,b}

^aDepartment of Physics, Niigata University, Niigata 950-2181, Japan

^bRIKEN iTHEMS, RIKEN, Wako 351-0198, Japan

E-mail: hongo@phys.sc.niigata-u.ac.jp

ABSTRACT: 複素関数論について、特に物理への応用を念頭においた講義ノートをまとめる。

[更新履歴]

- 2024/01/30: 6. 複素関数論の応用の途中までを修正・公開.
- 2024/01/22: 5. 複素関数の級数展開と無限和の終わりまでを修正・公開.
- 2024/01/16: 5. 複素関数の級数展開と無限和の途中までを修正・公開.
- 2024/01/09: 4. 複素関数の積分 2: コーシーの積分公式・留数定理の終わりまでを公開.
- 2023/12/18: 4. 複素関数の積分 2: コーシーの積分公式・留数定理の続きを修正・公開.
- 2023/12/04: 4. 複素関数の積分 2: コーシーの積分公式・留数定理の途中までを修正・公開.
- 2023/11/27: 3. 複素関数の積分 1: コーシーの積分定理の終わりまでを修正・公開.
- 2023/11/06: 2. 複素数と複素平面の途中までを公開.
- 2023/10/23: 1. 複素関数とその微分: 正則関数の終わりまでを修正・公開.

Contents

0 授業の目標	1
1 複素数と複素平面	3
2 複素関数とその微分：正則関数	12
3 複素関数の積分 1：コーシーの積分定理	31
4 複素関数の積分 2：コーシーの積分公式・留数定理	41
5 複素関数の級数展開と無限和	57
6 複素関数論の応用	65
7 授業のまとめ	77

0 授業の目標

現代物理学（とくに量子論）において複素数は「あるのが当然」というくらい基本的な数学的概念となっている。実際、学部3年次以降で習う科目において

- 量子力学：物理系の状態は波動関数と呼ばれる複素数に値を取る関数で記述される。
- (広い意味での) 場の理論：フーリエ解析と複素関数論が基本的な理論計算の手法の1つとなる。
- 素粒子論：複素数の位相を回す変換に対する量子ゲージ理論が量子電磁気学である。
- 弦理論・共形場理論：複素関数の正則性などの基本的な性質が、理論の解析に使われる。

というように、複素関数論の知識は現代物理学を学ぶ際に、多くの分野で必要になる。ちなみに、2つ目の「(広い意味での) 場の理論」には素粒子や原子核を記述するような相対論的な場の量子論だけでなく、実験室で取り扱う物質を記述する物性物理学や統計物理学も含む。また、数学的にも、〈リーマン予想〉など現代数学の未解決問題につながる基本となる分野となっている。ただし、この講義は主に物理学科の学生に向けた講義ということで、物理で必要となる具体的な計算法を主に扱っていく。

複素関数論は様々な分野で使われているが、複素数の「直感的な理解」はむずかしいこともある。また、複素関数論で出くわす公式には、かなり違和感を覚えるものも含まれる。たとえば、次式で定義されるリーマンのゼータ関数

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad \text{with } \operatorname{Re} z > 1 \quad (0.1)$$

というものがある(ここで、 $:=$ は「右辺により左辺を定義する」という数学記号)。このとき、引数 z に対して形式的に $z = -1$ を代入した結果について、

$$\zeta(-1) \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12} \quad (0.2)$$

という式が成立することを示すことができる。この式は $1 + 2 + 3 + \dots$ という無限和に対応する $\zeta(-1)$ という量が有限かつ負の定数になることを主張しており、明らかに常識はずれだと思うことだろう(筆者もそう思

う). 実際は、 $\frac{?}{?}$ と書いたように、1つ目の等号は文字通り受け取ってはならないのだが、 $\zeta(-1) = -1/12$ という結果自体は、実際に現代物理(たとえば、場の量子論)で使われる公式であり、かつ実験的な検証もなされている(はず)の式である。

この授業は理論物理で必要になる複素関数論の基礎を学び、来年度以降に習う現代物理学に現れる計算を実行できるようになるための準備を行うものである。講義を通して習得すべき具体的に課題を以下にまとめる：

- (i) 複素数の四則演算など、基本的な計算規則を使いこなせるようにする (2 コマ)。
- (ii) 複素関数の微分が実行でき、正則関数の定義や性質を理解する (3 コマ)。
- (iii) 複素関数の積分定理を理解し、実際の計算(とくに留数積分)を実行できるようなる (5 コマ)。
- (iv) 複素関数の級数展開(ローラン展開)と解析接続を理解・実行できるようになる (3 コマ)。
- (v) ガンマ関数・ゼータ関数や鞍点法などの複素関数の応用を理解する (2 コマ)。

◇ 成績評価の方法

授業の成績評価は

- 講義中に出題する小レポート(5-6回程度)：30点
- 学期末の期末試験：70点

で定める。試験の成績のみが悪く合格点に届かなかった場合、ちゃんと課題に取り組んだレポートを80パーセント以上(5回出題した場合は4回以上、6回出題した場合は5回以上)提出している場合にのみ再テストを実施する。レポートの提出数が規定に満たない場合は、救済措置は決して取らないので注意すること。レポートの出題・提出は学務情報システムを用いて行う。詳細はレポート出題時にアナウンスする。

◇ 参考図書

たとえば、以下の本を参考図書として挙げておく：

- 『理工系の数学入門コース 複素関数』, 表 実, 岩波書店(1988)
できるようになってほしい基本的な計算が多く例とともに載っている。
- 『複素関数入門(現代数学への入門)』, 神保 道夫, 岩波書店(2003)
複素関数論の数学と計算技法が、洗練された形でまとまっている本。上の本よりも少し発展的。
- 『物理のための数学入門 複素関数論』, 有馬 朗人, 神部 勉, 共立出版(1991)
物理学者が書いた複素関数論の教科書。計算法だけでなく、数学的にもちゃんとまとまっている。
- 『自然科学者のための数学概論 増訂版』, 寺沢 寛一, 岩波書店(1983)
複素関数論だけでなく物理数学の多くの分野が載っている辞書的な本。

1 複素数と複素平面

◇ なぜ複素数が必要か？

〈数〉という概念のもっとも原始的なものの1つに〈自然数〉がある。数学的な観点から数の体系を考える際に、決定的に大事になるのは、

考えている数が、どのような〈操作〉のもとで閉じた体系を与えているか

である。ここで、「ある〈操作〉のもとで閉じている」というのは、「操作の後に出てくる〈数〉が、その操作を定義する際に用いられた数に収まっているか」という意味で用いている。

具体的な例で考えてみよう。最も単純な数の1つである〈自然数〉は足し算・かけ算について閉じた体系を与えている。しかし、自然数同士の引き算を行うと、場合によっては負の数が見れることからわかるように、引き算まで考慮すると自然数は閉じた数の体系を与えない。したがって、引き算についても閉じていることを要請すると、負の数も含めた〈整数〉まで数の概念を格上げする必要がある。さらに、整数同士の割り算を行うと、一般に整数として表すことができない分数が見れる。そこで、割り算についても閉じていることを要請すると〈有理数〉を考える必要がある。さらに、ある種の極限操作のもとで閉じていること(より正確には完備性)を要請すると〈実数〉が得られる。このように〈数の概念〉を許される操作によって拡張していくと、〈複素数〉とは「(ある数の集まりを係数に持つ)代数方程式を解く」という操作のもとで閉じた〈数〉として理解できる。これを説明しよう。

まず、「(ある数の集まりを係数に持つ)代数方程式を解く」という操作を実数を係数に持つ場合について考えてみよう。実数係数の代数方程式の例として $x^2 = -1$ を考えると、この代数方程式の解 x は実数では記述できないことに気づく。したがって、実数は「代数方程式を解く」という操作のもとで閉じた体系をなしていないことがわかる。

そこで、 $i^2 = -1$ を満たす虚数 i を用いて

$$z = x + iy \quad \text{with } x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \tag{1.1}$$

と一意に表される〈複素数〉を導入し、数の概念を拡張してみよう。ここで、ある数 a が実数であることを「 a は実数の集合 \mathbb{R} に属する」という意味の数学記号「 $a \in \mathbb{R}$ 」により表した。¹ このとき、複素数を係数に持つ代数方程式の解について、以下の定理が知られている(証明はここではしない)：

定理. 〈代数学の基本定理〉 複素係数の任意の n 次方程式(代数方程式)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{with } a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0 \tag{1.2}$$

は重複も込めてちょうど n 個の複素数解を持つ。

代数学の基本定理は、複素数が「代数方程式を解く」という操作のもとで閉じた数の体系を与えていることを保証するものになっている。つまり、複素数は空虚な数でも複雑な数でもなく、数学的に閉じた操作を拡張していくことによって自然に導入される素性のよい数である。では、複素数とは具体的にどのように計算できる数なのか。これを次に復習しておこう。

〈操作〉	対応する〈数〉	数学記号
足し算・かけ算	自然数	N
足し算・かけ算・引き算	整数	Z
足し算・かけ算・引き算・割り算	有理数	Q
足し算・かけ算・引き算・割り算・極限操作	実数	R
足し算・かけ算・引き算・割り算・極限操作・代数方程式を解く	複素数	C

表 1. 数の体系を与える操作.

¹ここで、 $a \in A (\Leftrightarrow A \ni a)$ は数学記号で、 a という数学的対象が、集合 A の元(要素)であることを示している。

◇ 複素数の定義と計算規則

既に前節で導入してはいるが、まず複素数を以下で定義する：

定義. 〈複素数〉 複素数 z とは $i^2 = -1$ を満たす虚数 i を用いて

$$z = x + iy \quad \text{with} \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \quad (1.3)$$

と一意に表される数とする. z が複素数であることを、数学記号を用いて $z \in \mathbb{C}$ と表す.

ここで、 x, y のことをそれぞれ複素数 z の**実部**、**虚部**と呼び、 $\operatorname{Re} z = x$ 、 $\operatorname{Im} z = y$ と表す. とくに $\operatorname{Im} z = 0$ のときは z は**実数**となる. また、 $\operatorname{Re} z = 0$ を満たす z を**純虚数**と呼ぶ.

複素数に関しても実数のときと同様に、〈足し算・引き算・かけ算・割り算〉の四則演算が定義される. 実数に比べて新しいのは i という虚数が「 $i^2 = -1$ を満たす」ということだけである. 具体的には、以下のよう複素数の四則演算を定義する：

定義. 〈複素数の四則演算〉 2つの複素数 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ が $z_1 = x_1 + iy_1$ 、 $z_2 = x_2 + iy_2$ と表されたものとする ($x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$). このとき、 z_1, z_2 に関する四則演算を次式で定義する：

$$\bullet \text{ 足し算} : z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \quad (1.4a)$$

$$\bullet \text{ 引き算} : z_1 - z_2 := x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) \quad (1.4b)$$

$$\bullet \text{ かけ算} : z_1 z_2 := x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (1.4c)$$

$$\bullet \text{ 割り算} : \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad (\text{ただし } z_1 \neq 0) \quad (1.4d)$$

既に導入部で用いたが、 $:=$ は「右辺により左辺を定義する」という数学記号であり、複素数の四則演算を右辺で定めたことを意味する.

さて、かけ算と割り算の定義は少し複雑に見える. しかし、これらを公式として覚える必要はない. というのも、 $i^2 = -1$ を用いて実多項式と同じようにして計算していくと

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \frac{z_2}{z_1} &= \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} \cdot \frac{x_1 - iy_1}{x_1 - iy_1} = \frac{x_1 x_2 - ix_2 y_1 + ix_1 y_2 - i^2 y_1 y_2}{x_1^2 - ix_1 y_1 + ix_1 y_1 - i^2 y_1^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

と導出できるからだ. したがって、複素数の計算は $i^2 = -1$ という虚数の定義さえ覚えておけば、実数と同じように実行することができる.

ここで、式 (1.5) に示した「かけ算と割り算の定義の導出」では、途中計算で実多項式のときに成り立っていた計算規則—具体的には、交換則や分配則など—を用いて計算を行った. これらの性質は、数学的構造にとって重要になるもので、実は定義から従うものなのかをまず調べる必要がある. 複素数の四則演算の定義式 (1.4) に基づいて調べてみると、実際に以下を満たしていることを示すことができる：

〈複素数の四則演算が満たす性質〉 式 (1.4) で定義した複素数の四則演算は以下の性質を満たす：

$$\bullet \text{ 加法の交換則・結合則} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (1.6)$$

$$\bullet \text{ 乗法の交換則・結合則} : z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad (1.7)$$

$$\bullet \text{ 分配則} : z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (1.8)$$

$$\bullet \text{ 加法・乗法の単位元の存在} : z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z \quad (1.9)$$

$$\bullet \text{ 加法・乗法の逆元の存在} : z + (-z) = 0, \quad z \cdot \frac{1}{z} = 1 \quad (z \neq 0) \quad (1.10)$$

より数学的な考え方をすると、以上の性質を満たす〈数〉となるように、複素数の四則演算を定義したと考えるとよい。ちなみに、余談ではあるが、これらの代数構造を持つ数学的対象を〈体(field)〉と呼ぶ。よって、このような代数構造を強調したい場合、上で与えた四則演算を持つ複素数全体の集合を〈複素数体〉と呼ぶ(数学記号としても \mathbb{C} で表す)。

(第1回ここまで, 2023/10/16)

◇ 複素共役とノルム

式(1.5)の割り算の導出を振り返ると、途中式で複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$ の「対」になるような $x_1 - iy_1$ という複素数が現れていることに気づく。そこで、複素数 $z \in \mathbb{C}$ について、その〈複素共役〉と呼ばれる複素数 \bar{z} を「虚部の符号をひっくり返す」ことにより定義する。

定義. 〈複素共役〉複素数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、その複素共役 \bar{z} を次式で定義する：

$$\bullet \text{ 複素共役: } \bar{z} := x - iy \quad (1.11)$$

ちなみに、複素共役を \bar{z} の代わりに z^* として表すこともあるので、注意しておく。

複素数 z とその複素共役 \bar{z} の足し引きを考えてみると、複素数 z の実部と虚部が z と \bar{z} を用いて

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.12)$$

と表すことができることがわかる。また、定義から複素共役を2回取ると元の複素数に戻ることや、和や積の複素共役が複素共役の和や積になること、つまり

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad (1.13)$$

が成立することが示される。念のため、最後の性質のみ示しておこう。すると、 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ として、具体的に計算することで

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \bar{z}_1 \bar{z}_2 &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \quad (1.14)$$

となることから、確かに $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ が成立することが確かめられる。

さて、実数については、不等式が定義されていたことからわかるように、さらに〈順序〉という構造を持っていた。複素数 z は実部と虚部を併せ持つため、実数のように順序づけを与えることは困難である。しかし、複素数についてもその「大きさ」を記述する量があると便利であろう。このような動機のもと、複素数 z の〈ノルム〉と呼ばれる量を導入しよう。

定義. 〈複素数のノルム〉複素数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、そのノルム $|z|$ を次式で定義する：

$$\bullet \text{ ノルム: } |z| := \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.15)$$

複素共役とノルムを用いると、複素数の割り算を簡潔に表すことができることに気づく。実際、式(1.5)を思い出すと、

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{z_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_1 z_2}{|z_1|^2} \quad (1.16)$$

となる。特に、 $1/z$ という複素数は

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (\text{ただし } z \neq 0) \quad (1.17)$$

と簡潔に表される。

◇ 複素平面・オイラーの公式

複素数 $z = x + iy$ は実部 x と虚部 y という2つの実数の組で記述される数になっている。そこで、横軸・縦軸の値が実部と虚部に一致する2次元平面を導入すると、図1に示すように、2次元平面上の点として複素数を表すことができる。複素数を図示するこのような平面のことを〈複素平面〉と呼び、実部を表す横軸を実軸、虚部を表す縦軸を虚軸と呼ぶ。

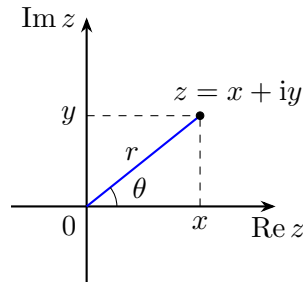


図1. 複素平面を用いた複素数の表示.

さて、複素数を複素平面上の点として表すと、〈距離〉を導入するのが自然なように思われてくる。そこで、複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$ と $z_2 = x_2 + iy_2$ の間の距離を、通常の2次元平面上の距離として $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ と定義してみることを考えよう。すると、この平面上の距離は既に導入したノルムを用いて、次のように簡潔に定義できることがわかる。

定義. 〈複素数間の距離〉 2つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$ と $z_2 = x_2 + iy_2$ の間の距離を次式により定義する：

$$|z_1 - z_2| := \sqrt{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_2)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1.18)$$

通常の2次元平面上の距離と一致していることからただちにわかるように、ここで定義した距離は

- **非退化性**： $|z_1 - z_2| = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$,
 - **対称性**： $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$,
 - **三角不等式**： $|z_1 - z_2| + |z_1 - z_3| \geq |z_2 - z_3|$
- (1.19)

という3つの条件 (= 距離の公理) を満たすことが確認できる。

さて、複素平面について、図1に示した極座標表示を導入してみよう。ここで、原点と複素数 z との距離は $r = |z|$ とノルムで与えられることに注意し、原点と z を結ぶ直線が正の向きの実軸となす偏角 θ と表そう。このとき、三角関数の知識から $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ が成立することを用いると、複素数 z を

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{with} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (1.20)$$

と表すことができる。ここで $\tan \theta$ の逆関数を $\arctan \theta$ と表した(つまり、最後の式は $\frac{y}{x} = \tan \theta$ を意味する)。このような複素数の極表示を用いると、以下のように図形を簡潔な方程式によって表すことができる。

例. 複素数による図形の表示：いま、ある定まった複素数 $\alpha = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) と実数 r を考える。このとき、複素数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に関して

$$|z - \alpha| = r \quad (1.21)$$

という式は複素平面上の円を表すことがわかる。実際、式(1.21)において、距離の定義(1.18)を適用すると

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1.22)$$

と表すことができる。したがって、式 (1.21) を満たす複素数 z は、複素平面上で図 2 に示したような中心 α 、半径 r の円を表すとわかる。

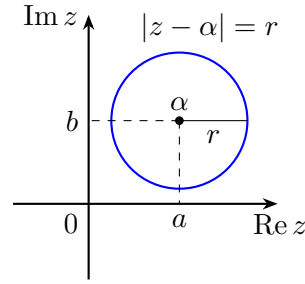


図 2. $|z - \alpha| = r$ が表す図形.

さて、複素数 z を距離と偏角で表した式 (1.20) には三角関数の和 $\cos \theta + i \sin \theta$ が現れている。この特定の組み合わせで現れている三角関数の和について考えてみよう。そのために、微積分学で習った三角関数に関するテイラー展開を用いると

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \theta^{2k} \\ \sin \theta &= \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \theta^{2k+1} \end{aligned} \quad (1.23)$$

という無限級数が得られる。そこで、 $i^2 = -1$ を思い出して、このテイラー展開を用いて三角関数の和 $\cos \theta + i \sin \theta$ を表すと

$$\begin{aligned} \cos \theta + i \sin \theta &= 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (i\theta)^{2k} + \frac{1}{(2k+1)!} (i\theta)^{2k+1} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n \end{aligned} \quad (1.24)$$

が得られる。さて、最終行に現れた無限和は見覚えのある形になっている。というのも、**ネイピア数**と呼ばれる自然対数の底 $e = 2.718 \dots$ の指数関数 e^x ($x \in \mathbb{R}$) のテイラー展開が

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad (1.25)$$

で与えられるからだ。すると、上で得られた式は e^x のテイラー展開について、形式的に $x \rightarrow i\theta$ と置き換えたものになっていることに気がつく。しかし、まじめに考えると、実関数の微積分学では指数関数 e^x の引数 x は実数を想定しており、純虚数 (より一般には複素数) を代入した指数関数は正しく定義されているのかわからなくなる。

そこで、複素数を引数とした指数関数が未定義であることを逆手にとって、形式的に

$$e^{i\theta} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n \quad \text{with } \theta \in \mathbb{R} \quad (1.26)$$

と定義することにしてみよう。この定義を認めると、式 (1.24) に示した計算から次の公式が得られたことになる：

● **オイラーの公式** : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (1.27)

これは有名なオイラーの公式と呼ばれる式で、特に $\theta = \pi$ としたときには、 $e^{i\pi} = -1$ という有名な式 (ネイピア数 e , 虚数 i , 円周率 π が1つの式に現れる) を与える。

実数関数の微積分学において、三角関数や指数関数はあまり似たところのない別物の関数であったことを思い出そう。すると、オイラーの公式は「複素数まで数の概念を拡張することで、別物のように見えていた三角関数や指数関数が統一的に理解できること」を示している。

◇ 複素数の極座標表示

複素数 z の表し方に話を戻そう。オイラーの公式を用いると、複素数 z はそのノルムと偏角を用いて

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = |z|, \quad \theta = \arg z \quad (1.28)$$

と表せることがわかる。この式のように大きさと偏角を用いて複素数を表すことを、複素数の極座標表示 (略して極表示) と呼ぶ。ある複素数 z を極表示するためには、ノルム r と偏角 θ がわかればよい。ただし、ノルムは一意に定まる量であるのに比べて、偏角はそうではないことに注意が必要である。実際、三角関数の周期性からわかるように偏角 θ と $\theta + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) について、 $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2n\pi)}$ が成立するため、偏角は $\text{mod } 2\pi$ でしか定義されない。このために、 θ の取りうる範囲については、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とか $-\pi \leq \theta < \pi$ などの制限をかけることが普通である。 θ の範囲は自分で勝手に選ぶことができるが、この授業ではなるべく $-\pi \leq \theta < \pi$ を使うようにし、それ以外の規則を使うときには明言するようにする。

さて、この章のはじめに与えたように複素数の四則演算は、実部と虚部に分けて実数と同じ計算規則に従って具体的に計算することができる。しかし、複素数の計算については、絶対値・複素共役や極表示などを用いて行っていくと便利なことも多い。

複素数の極表示は実用上も便利である。以下では、加法定理の導出、1の n 乗根、古典力学における調和振動子の記述法という3つの応用例を以下に示しておこう。

例. 加法定理の導出: 2つの複素数の極表示 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ を用いてこれらの掛け算 $z_1 z_2$ を2通りの方法で表すと

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i\{\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1\}] \end{aligned} \quad (1.29)$$

が得られる。1つ目の式変形では、指数関数の性質 $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ を用いた。2つの結果が等しくなることから、実部と虚部を比較して

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

が得られるが、これは三角関数の加法定理に他ならない。

例. 1の n 乗根: 複素数 z について

$$z^n = 1 \quad (1.31)$$

を満たす z を1の n 乗根と呼ぶ。たとえば、1の2乗根 ($n = 2$ のとき) が ± 1 であるのはよく知られており、 $n = 3$ のときも因数分解することで

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (1.32)$$

と求めることができるが、一般の n について解くのは少しめんどろなように思われる。しかし、これは複素数の極表示を用いるとただちに解くことができる。

そのために、 $z = re^{i\theta}$ という極表示を上式に代入すると

$$r^n e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} r = 1 \\ n\theta = 0 \pmod{2\pi} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = 1 \\ \theta = \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{array} \right. \quad (1.33)$$

が得られる。 $r = 1$ という条件から、解は複素平面で単位円の上にあることがわかる。さらに、偏角の条件から、 $k = 0$ に対応する $z = 1$ からスタートして、原点から $2\pi/n$ ずつ回した半直線と単位円との交点が 1 の n 乗根を与えていることがわかる。 $n = 2, 3, 4$ の場合について、結果を複素平面上で表したものが図 3 に示した。

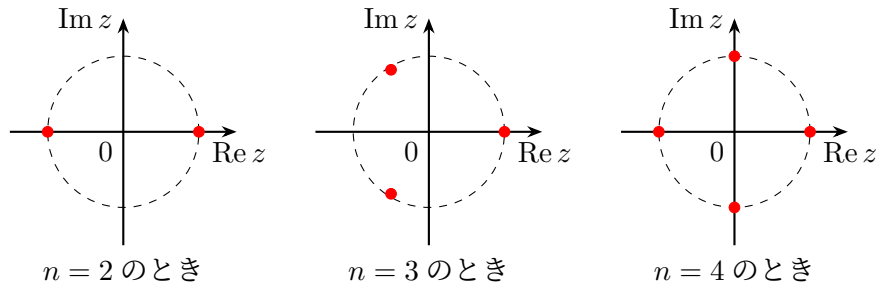


図 3. 1 の n 乗根の複素平面上の位置.

物理への応用例. 調和振動子の古典力学: 古典力学における 1 次元調和振動子の運動を考えてみよう。固有振動数 ω のバネに取りつけられた質量 m の質点の運動は

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m\omega^2 x(t) \quad (1.34)$$

という 2 階の常微分方程式で記述される。この方程式の一般解はよく知られたように、

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad (1.35)$$

で与えられる。ここで、 A と δ は積分定数である。これを複素数の極表示を用いて解き直してみよう。

まず、運動方程式を考える代わりに、調和振動子が持つエネルギーに注目しよう。古典力学で習うように、エネルギーは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和で与えられる。複素数まで拡張すると、この和を次のように因数分解することができる：

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 + \frac{1}{m^2\omega^2} p^2 \right) \\ &= \frac{1}{2m} m^2\omega^2 \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right) \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right) \\ &= \hbar\omega \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right) \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right) \\ &= \hbar\omega |a|^2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

3 行目では、勝手な定数 \hbar を掛けて割るという恒等変形を行った。また、最終行では

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right), \quad \bar{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right) \quad (1.37)$$

という複素数を定義し、 $\bar{a}a = |a|^2$ というノルムで表されることを用いた。

さて、いま考えている調和振動子の運動について、エネルギー E が保存することを思い出そう。すると、エネルギー保存則から、

$$|a| = \sqrt{\frac{E}{\hbar\omega}} = \text{const.} \quad (1.38)$$

という式を満たすことがわかる。よって、 a を複素平面上で表すと、調和振動子の運動は半径 $\sqrt{\frac{E}{\hbar\omega}}$ の円で記述されることがわかる。そこで、係数を調整して $z := x + \frac{i}{m\omega}p = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}a$ という複素数で考えてみよう。このとき、 $|z| = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ となるので、単振動は実部と虚部がそれぞれ x と $\frac{p}{m\omega}$ で与えられる複素平面において半径 $\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ の円の上での運動を表すことがわかる。さらに、 a の時間微分を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{i}{m\omega} \frac{dp}{dt} \right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{1}{m}p + \frac{i}{m\omega}(-m\omega^2x) \right) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{1}{m}p - i\omega x \right) = -i\omega \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega}p \right) \\ &= -i\omega a(t) \end{aligned} \quad (1.39)$$

を満たすことがわかる。よって、時刻 $t=0$ での初期値を $a_0 := a(t=0)$ と表すと、微分方程式の解はただちに

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega t} \quad (1.40)$$

で与えられることがわかり、 $a(t)$ という量の運動は複素平面での時計回りでの回転で記述されることがわかる。また、 $a(t)$ から定数倍だけずらした複素数 $z(t)$ の定義を思い出してその実部と虚部を取ると、これらが $x(t)$ や $\frac{1}{m\omega}p(t)$ を与えることがわかる。以上から、単振動は図 4 のように複素平面上的回転を、実軸・虚軸への射影したものと理解できることがわかる。

ちなみに、計算途中で勝手に掛けて割った \hbar というまったく不要に見える定数は量子力学において現れる重要な定数で、**換算プランク定数**と呼ばれる物理定数である。また、 \bar{a} と a は調和振動子の量子力学(さらにはその一般化としての場の量子論)を考える際に、**〈生成・消滅演算子〉**と呼ばれる「演算子」に格上げされた上で、非常に基本的な役割を果たす。

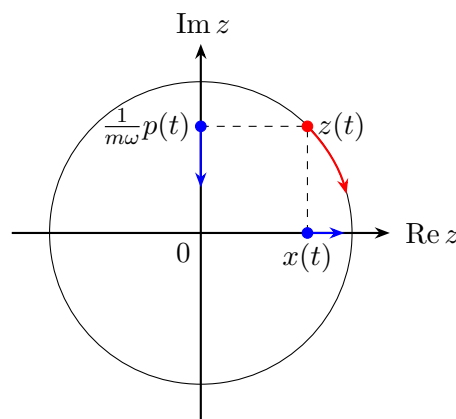


図 4. 複素平面を用いた単振動の記述.

(第 2 回ここまで, 2023/10/23)

[複素解析] 演習問題 1 (2023 年 10 月 23 日 出題, 2023 年 10 月 29 日 (日) 17 時提出締め切り)

問 1 以下の複素数を $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) という標準形になるように簡約化せよ.

$$(1) (1+i)(4+3i) \quad (2) (2+i)(2-i) \quad (3) \frac{1}{1+3i} \quad (4) \frac{(3-i)^2}{2+i}$$

問 2 以下の複素数について, ノルム r と偏角 θ を求め, $re^{i\theta}$ という極形式で表わせ.

$$(1) -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (2) 1 - \sqrt{3}i \quad (3) (1 + \sqrt{3}i)^2 \quad (4) (1+i)^n$$

問 3 複素数 $z = x + iy = re^{i\theta}$ ($r = |z|$, $\theta = \arg z$) について, 以下の問いに答えよ

- (1) $\frac{1}{1-z}$ の実部と虚部を x, y を用いて表わせ.
- (2) $\frac{1}{1-z}$ の実部と虚部を r, θ を用いて表わせ.
- (3) $w := \frac{z-i}{z+i}$ の実部と虚部を求め, $|w| < 1$ という条件を x, y で表わせ.

解答例.

問 1 $i^2 = -1$ を使って計算していくと, 以下の通り:

$$\begin{aligned} (1) & (1+i)(4+3i) = 4 - 3 + i(3+4) = 1 + 7i \\ (2) & (2+i)(2-i) = 4 + 1 = 5 \\ (3) & \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{1+9} = \frac{1}{10} - \frac{3i}{10} \\ (4) & \frac{(3-i)^2}{2+i} = \frac{8-6i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{10-20i}{5} = 2 - 4i \end{aligned}$$

問 2 複素数 $z = x + iy$ について, 絶対値は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 偏角は $\tan \theta = y/x$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と計算すると

$$\begin{aligned} (1) & r = 1, \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ より } -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ (2) & r = 2, \theta = \frac{5\pi}{3} \text{ より } 1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} \\ (3) & 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ を用いると } (1 + \sqrt{3}i)^2 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \left(r = 4, \theta = \frac{2\pi}{3} \right) \\ (4) & 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ を用いると } (1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{n\pi}{4}} \quad \left(r = 2^{\frac{n}{2}}, \theta = \frac{n\pi}{4} \pmod{2\pi} \right) \end{aligned}$$

問 3 $z = x + iy = re^{i\theta}$ とオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を使って計算していくと

$$\begin{aligned} (1) & \frac{1}{1-z} = \frac{1-\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-\bar{z}}{1+|z|^2-(z+\bar{z})} = \frac{1-(x-iy)}{1+x^2+y^2-2x} \\ & \text{よって } \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} = \frac{1-x}{1+x^2+y^2-2x}, \operatorname{Im} \frac{1}{1-z} = \frac{y}{1+x^2+y^2-2x} \\ (2) & \text{上で得られた結果で } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ とすればよい.} \\ & \text{よって } \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} = \frac{1-r \cos \theta}{1+r^2-2r \cos \theta}, \operatorname{Im} \frac{1}{1-z} = \frac{r \sin \theta}{1+r^2-2r \cos \theta} \\ (3) & w = \frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)(\bar{z}-i)}{(z+i)(\bar{z}-i)} = \frac{|z|^2-1-i(z+\bar{z})}{|z|^2+1-i(z-\bar{z})} = \frac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+y^2+1+2iy} \\ & \text{よって } |w| = \sqrt{\frac{(x^2+y^2-1)^2+4x^2}{(x^2+y^2+1+2iy)^2}} < 1 \Leftrightarrow 4y[x^2+(y+1)^2] > 0 \Leftrightarrow y > 0 \end{aligned}$$

2 複素関数とその微分：正則関数

◇ 複素関数

複素数の定義と計算法が定まったので、次に〈複素関数〉を考えたい。そこで、実数値関数(以下、実関数)が「実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、ある実数 $f(x) \in \mathbb{R}$ を対応させる規則 (= 関数)」として定義されていたことを思い出そう。そこで、複素関数に対しても

複素関数とは「複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対し、ある複素数 $f(z) \in \mathbb{C}$ を対応させる関数」

と考えることにする。前節で扱ったように複素関数の引数は $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と実部 x , 虚部 y に分解できるが、関数として得られる $f(z)$ もまた複素数なので、次のように実部・虚部に分解できる：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.1)$$

ここで、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は実2変数 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の上で定義された実数値関数を表している。したがって、2変数の実関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ があれば、1つの複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ を定義することができる。

実関数がそうであったように、複素関数 $f(z)$ も複素数 \mathbb{C} の部分集合 $D \subset \mathbb{C}$ の上でのみ定義されていることもある。このとき、実関数のときと同様にして、部分集合 $D \subset \mathbb{C}$ を $f(z)$ の定義域と呼ぶ。また、複素関数 $f(z)$ の取りうる領域 a 前節で見たように、 $z = x + iy$ の実部と虚部が

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (2.2)$$

と表されることを思い出すと、実部と虚部 $u(x, y), v(x, y)$ を具体的に z と \bar{z} の関数として表すこともできる。

例. 複素関数の表し方：複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として、

$$u(x, y) = x + y^2 + 1, \quad v(x, y) = x^2 + 2y + 3 \quad (2.3)$$

を考える。上に与えた x, y の表式 (2.2) を使うと、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{z + \bar{z}}{2} + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + 1 = 1 + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) - \frac{1}{4}(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) \\ v(x, y) &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \frac{z - \bar{z}}{2i} + 3 = 3 + \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) + \frac{1}{4}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

と z と \bar{z} を用いて表すことができる。したがって、これを用いて整理すると、ここで考えている複素関数 $f(z)$ を z と \bar{z} を用いて

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) - \frac{1}{4}(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + i \left[3 + \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) + \frac{1}{4}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) \right] \\ &= 1 + 3i + z + \frac{1}{4}(-1 + i)z^2 + \frac{1}{2}(1 + i)\bar{z}z + \frac{1}{4}(-1 + i)\bar{z}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

と表すことができる。

上の例で得られた結果を一般化すると、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が x, y の多項式で与えられるときには $f(z)$ は複素数 $a_{ij} \in \mathbb{C}$ を係数とする z, \bar{z} の多項式関数 $f(z) = \sum_{i,j=0}^N a_{ij} z^i \bar{z}^j$ として表されるだろうと推察できる。

◇ 複素数列の極限

複素数と複素関数が定義されたたので、「複素関数の微分」を考えていきたい。しかし、そのためには複素関数 $f(z)$ の極限值、つまり、その変数 z をある複素数 z_0 に近づけたときのふるまいを明らかにする必要がある。そこでまず、複素数の数列に関する極限値の定義とその性質をまとめておこう。

定義. 〈複素数列の極限〉 複素数の数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束することを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n - \alpha| = 0 \quad (2.6)$$

と定義する.

ここで、複素数列の極限を、複素数間の距離 $|\alpha_n - \alpha|$ を使って定義した. 前節の定義 (1.18) で与えたように、複素数間の距離は (複素) 平面上の距離として定義されている. したがって、 $\alpha_n = a_n + ib_n$, $\alpha = a + ib$ と実部と虚部分けると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad (2.7)$$

と実部が表す実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と虚部が表す実数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の両者が収束することとして理解できる. このことから、「複素数列の極限の性質や具体的な計算は、2つの実数列の極限の問題に帰着させて理解できる」とわかる. たとえば、複素数列の極限に関して、次の一連の性質が成り立つことを示すことができる:

〈数列の極限に関する性質〉 収束する複素数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c\alpha_n &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \quad (c \in \mathbb{C}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n} \quad \left(\text{ただし } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \neq 0 \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

また、複素数の数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は、次の条件が成り立つことである:

$$\bullet \text{ コーシーの判定条件: } \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{p > 0} |\alpha_N - \alpha_{N+p}| = 0 \quad (2.9)$$

また、実数列の場合と同様にして、複素数列の無限和 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ に関しても、その部分和を

$$S_n := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad (2.10)$$

と定義して、数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限として定義できる.

例. 等比級数の和: 複素数 z に関する等比級数の無限和 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ を考える. このとき,

$$S_N := \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \quad (2.11)$$

となることを思い出すと、無限和は $|z| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$ から収束し

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad (2.12)$$

を与える。このとき、 $z = re^{i\theta}$ という極表示を用いて、両片を別々に計算すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] \\ \frac{1}{1-z} &= \frac{1-\bar{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-r\cos\theta + ir\sin\theta}{(1-r\cos\theta)^2 + (-r\sin\theta)^2} \\ &= \frac{1-r\cos\theta + ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta + r^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

が得られる。したがって、これらの実部と虚部が一致することから、次の関係式が得られる：

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta + r^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta + r^2}, \quad (2.14)$$

◇ 複素関数の極限・連続性

さて、複素数列の極限が定義されたので、次に複素関数 $f(z)$ の $z \rightarrow z_0$ の極限について考えよう。そのために、 z は複素平面上に表されるような実 2 変数に対応することを思い出そう。すると、2 変数実関数の極限のときと同様にして、極限を考える場合に複素平面のどちら側から近づいてくるのかを考える余地があることに気づく。2 変数実関数のときと同様にして、 z_0 への近づき方次第で極限の値が異なってしまったら困るので、「 $z \rightarrow z_0$ とするときの z_0 への近づき方によらず複素関数 $f(z)$ の値がある値 w_0 に限りなく近づくととき、 $f(z)$ が $z \rightarrow z_0$ で極限值 w_0 を持つ」と定義しよう。式を用いて定義を表すと、以下のとおり：

定義. 〈複素関数の極限值〉 複素関数 $f(z)$ について考える。このとき、 $z, z_0 \in \mathbb{C}$ について $z \rightarrow z_0$ 、つまり $|z - z_0| \rightarrow 0$ の極限を考えたとき、 $|f(z) - w_0| \rightarrow 0$ を満たすとき、 $f(z)$ は $z \rightarrow z_0$ で極限值 w_0 を持つといい、次のように表す：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad (\text{または } z \rightarrow z_0 \text{ で } f(z) \rightarrow w_0) \quad (2.15)$$

近づき方に依存しないことは、距離 $|f(z) - w_0| \rightarrow 0$ を使って実現されている。

このようにして定義された複素関数の極限值について、数列の極限の性質 (2.8) から推測されるように

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) &= c \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad (c \in \mathbb{C}) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) &= \left(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right) \left(\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \right) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \quad \left(\text{ただし } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0 \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

を満たすことが示される。

以上で定義した複素関数の極限值を用いて、その連続性を以下のように定義する：

定義. 〈複素関数の連続性〉 複素関数 $f(z)$ について、 $z \rightarrow z_0$ において $f(z)$ が極限值 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ を持ち、かつ、それが $f(z_0)$ と一致するとき、複素関数 $f(z)$ は $z = z_0$ で連続であるという。

例. 複素関数の極限と連続性：複素関数 $f(z)$ と $g(z)$ として

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + i} \quad (z \neq -i), \quad g(z) = \begin{cases} \frac{z^2 + 1}{z + i} & (z \neq -i) \\ -2i & (z = -i) \end{cases} \quad (2.17)$$

を考える. 関数 $f(z)$ と $g(z)$ は $z \neq -i$ で

$$f(z) = g(z) = \frac{(z+i)(z-i)}{z+i} = z-i \quad (2.18)$$

となるので, $z \rightarrow -i$ の極限值はどちらも

$$\lim_{z \rightarrow -i} f(z) = -2i = \lim_{z \rightarrow -i} g(z) \quad (2.19)$$

と等しい. $g(z)$ はこの極限値が $g(-i) = -2i$ と一致しているので, $z = -i$ で連続であるが, $f(z)$ は $z = -i$ での値が定義されていないので $z = -i$ で連続ではない.

(第3回ここまで, 2023/10/30)

◇ 複素関数の微分

上で見たように複素関数 $f(z)$ は2変数実関数の和で記述されている. そこで, 多変数関数の微分で習ったものをそのまま使って, x と y に関する偏微分を実部・虚部の偏微分の和として次のように定義しよう:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) := \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(z) := \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial y} v(x, y), \quad (2.20)$$

この定義から, 2変数実関数の偏微分ができれば, 複素関数 $f(z)$ の実部 x と虚部 y に関する偏微分を計算できることがわかる.

さて, 以上の偏微分 $\partial/\partial x$ と $\partial/\partial y$ は計算上の困難はないものの, 「複素関数の微分」としてはいまいちのような気がする. 「複素関数の微分」としてより直接的に思われるのは, 複素関数 $f(z)$ の z に関する微分であろう. しかし, 複素数 z は実部と虚部を持つ数であり, その「微分」が何を意味するのかは明瞭ではない. そこで, 前節の多項式関数の例で見たように, 複素関数 $f(z)$ は一般に z と \bar{z} を用いて表されるようなので, 形式的に「 z と \bar{z} の偏微分」を考えることにしよう. まじめに考えると, 複素数 $z = x + iy$ が定まると $\bar{z} = x - iy$ と定まるので, 「偏微分」の定義も曖昧なような気もしてくるが, とにかく形式的に

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{i}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2}, \quad (2.21)$$

と定義した上で, 微分の連鎖率を用いて

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.22)$$

と定義することにする. これを使って $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の微分を行うと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} f(z) &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) [u(x, y) + iv(x, y)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) [u(x, y) + iv(x, y)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

と与えられる.

例. 複素関数の微分: 簡単な複素関数の具体例として $f(z) = z = x + iy$, つまり $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$ と $g(z) = \bar{z} = x - iy$, つまり $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ の場合の微分を行ってみよう. 上の結果を用いると, ただちに

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1, \quad (2.24)$$

と求まる. したがって, 式(2.22)で定義した z と \bar{z} の偏微分は, z と \bar{z} をあたかも独立変数とみなして,

それぞれの微分をしたものと一致することがわかる。

◇ コーシー・リーマンの関係式

前節では x, y や z, \bar{z} に関する偏微分を定義したが、「複素数 z に関する全微分」のような微分を考えたい。そこで、実関数のときのやり方に倣って、複素関数 $f(z)$ の微分を

$$\frac{df(z)}{dz} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (2.25)$$

で定義してみよう。この微分は前節の偏微分とは異なるものと考えていることに注意してほしい。ここで、式 (2.25) で定義した微分が存在する条件を考えたい。これまでに見たように、複素関数は実部と虚部に分けたら 2 変数実関数が 2 つあるに過ぎなかった。すると、複素関数の微分もその実部と虚部が実関数として微分可能ならば上の微分も存在するのではないかと期待したくなる。しかし、この期待は成り立っていないことが次の例からわかる。

例. 複素関数 $f(z) = \bar{z} = x - iy$ を考えよう。この関数の実部と虚部はどちらも実関数としてなめらかで何回でも微分可能である。しかし、複素関数としての微分は

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = e^{-2i\theta} \quad (2.26)$$

となる。最右辺で $h = |h|e^{i\theta}$ という極表示を使った。ここで、結果は $|h| \rightarrow 0$ としても θ の値に依存 (近づける向きに依存) しており、極限值が定まっていないことに注意してほしい。したがって、式 (2.25) の定義に現れる極限が存在せず、 $f(z) = \bar{z} = x - iy$ は複素関数として微分可能ではないことがわかる。

上の例が示すように、〈複素関数としての微分可能性〉はその実部と虚部の実関数としての微分可能性を調べるだけでは不十分である。そこで、複素関数としての微分可能性を理解するために、式 (2.25) の右辺に現れる極限が存在するかどうかをもう少しまじめに考えてみよう。このためには、これは $h \rightarrow 0$ の極限を取る際に、 h もまた複素数であることに注意し、「複素平面でどの向きから近づいても $|h| \rightarrow 0$ で式 (2.25) の右辺が同じ値を与えるときに、複素関数としての微分可能」と考えればよい

この条件を求めるために、実 2 変数関数 $u(x, y)$ の実関数としての微分可能性を思い出そう。2 変数実関数 $u(x, y)$ の微分可能性は $\Delta u(x, y) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$ について、微小な $\Delta r := \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ に対して

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + a\Delta x + b\Delta y + o(\Delta r) \quad \text{with} \quad a := \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad b := \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (2.27)$$

と表せることを意味していたことを思い出そう。ここで、 $o(\epsilon)$ はランダウの記号と呼ばれるもので、 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} o(\epsilon)/\epsilon = 0$ を満たす部分を表している。つまり、2 変数実関数 $u(x, y)$ の微分可能性とは「 $u(x, y)$ を (x, y) の 1 次式で近似できること」を意味していた。

同様の考え方を複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ に用いると、その微分可能性は

$$f(z + \Delta z) = f(z) + \alpha\Delta z + o(|\Delta z|) \quad \text{with} \quad \alpha := \frac{df(z)}{dz} = a + ib \quad (2.28)$$

と「 $f(z)$ を複素数 z の 1 次式で近似できること」として理解することができる。そこで、この条件から得られる帰結を調べるために、 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ と実部と虚部に分解して右辺を整理すると

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) &= u(x, y) + iv(x, y) + (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) \\ &= \left[u(x, y) + a\Delta x - b\Delta y \right] + i \left[v(x, y) + b\Delta x + a\Delta y \right] + o(|\Delta z|) \end{aligned} \quad (2.29)$$

が得られる。よって、両辺の実部と虚部を取ると

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) &= u(x, y) + a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta r) \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) &= v(x, y) + b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta r) \end{aligned} \quad (2.30)$$

が成立することがわかる。ここで、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ を Δx と Δy について展開した1次の係数の間に関係があることに注目する。具体的には

$$a = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad b = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (2.31)$$

という式が成り立つことを意味している。したがって、複素関数の微分可能性は、実部と虚部が実関数として偏微分可能であるだけでなく、偏導関数の間に適切な関係式が成立することを必要とする。つまり、複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が $z = x + iy$ において微分可能なとき、その実部と虚部の偏導関数は

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (2.32)$$

を満たす。逆に、実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ がそれぞれ2変数実関数として微分可能であっても、式(2.32)を満たさない場合には、複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は $z = x + iy$ において微分可能ではない。したがって、式(2.32)は複素関数としての微分可能性を定める重要な条件式になっており、〈コーシー・リーマンの関係式〉と呼ばれる。

以上の結果を複素数を z を用いてより直接的に表すこともできる。そのために、前節で導入した偏微分

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} f(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

を思い出そう。この2つ目の式とコーシー・リーマンの関係式を比べてみると、コーシー・リーマンの関係式は単純に

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0 \quad (2.34)$$

と表すことができることがわかる。さらに、コーシー・リーマンの関係式を用いると1つ目の式は

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = a + ib \quad (2.35)$$

に帰着するが、これは微分可能性に関する式(2.28)から従う

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = a + ib \quad (2.36)$$

と等しいことがわかる。したがって、複素関数の微分は

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \quad (2.37)$$

となり、形式的には z に関する偏微分として単純に理解することができる。

以上の結果から、 $f(z), g(z)$ が複素関数として微分可能なとき、その微分は z に関する偏微分として形式的に理解できた。したがって、複素関数の微分は、偏微分の性質を用いて示すことができる一連の性質を持つことがわかる。たとえば、微分に関する基本公式として、

- ライプニッツ則： $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = \frac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg(z)}{dz}$
- 合成関数の微分： $g = g(w), w = f(z)$ について $\frac{dg}{dz} = \frac{dg}{dw} \frac{dw}{dz}$

$$(2.38)$$

などが成立することが確かめられる。つまり、複素関数として微分可能だとわかっただけで、あとは通常通りのほぼ通常の微分として取り扱って計算できることがわかる。

以上で得られた結果をまとめておこう：

〈複素関数の微分可能性〉 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が複素関数として微分可能であるための必要十分条件は以下のとおり：

- 実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ が実関数として微分可能で、かつ
- コーシー・リーマンの関係式 (2.32)[または (2.34)] を満たす。

このとき、複素関数の微分は式 (2.37) で与えられる。

例. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.39)$$

で与えられるものを考える。実部と虚部をそれぞれ偏微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (2.40)$$

が得られるので、 $z \neq 0$ でコーシー・リーマンの関係式 (2.32) を満たし、複素関数として微分可能であることがわかる。また、 $z \neq 0$ における微分は式 (2.37) を用いて

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.41)$$

と求まる。以上の結果は、 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z} \quad (2.42)$$

と表して、以下を満たすことから理解できる：

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} = -\frac{\bar{z}^2}{(|z|^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.43)$$

(第4回ここまで, 2023/11/01)

◇ 正則関数・調和関数

さて、任意の複素関数 $f(z)$ は2つの実2変数関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ を用いて、 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と与えられるのだった。その中でもコーシー・リーマンの関係式を満たすものは、「複素関数として微分可能である」という特に性質がよい複素関数を与えている。そこで、このような性質のよい複素関数に名前を与えておこう。

定義. 〈正則関数と特異点〉 領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された複素関数 $f(z)$ が複素関数として微分可能なとき、 $f(z)$ は〈正則 (holomorphic)〉である (または〈正則関数 (holomorphic function)〉である) という。また、 $f(z)$ が $z = z_0$ で複素関数として微分可能でない (つまり正則でない) とき、この点 $z = z_0$ を特異点と呼ぶ。

コーシー・リーマンの関係式として式 (2.34) を思い出すと、正則関数は \bar{z} によらず、 z だけで表される関数であることがわかる。

さて、ある正則関数が既知のものとして与えられたとき、そこから新しい正則関数を作り出す方法を考えてみたい。正則関数かどうかは単に \bar{z} に依存しないことで判別できることに注意すると、次の結果を示すことができる：

定理. $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が正則のとき、以下の関数も正則である：

- 和と差： $f_1(z) \pm f_2(z)$
 - 積： $f_1(z)f_2(z)$
 - 商： $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ (ただし $f_2(z) \neq 0$)
- (2.44)

正則関数の和・差・積・商(ただし商は分母 = 0 となる点を除く) が正則関数になっていることを用いると、単純な正則関数からもう少し複雑なものを構成することができる。

例. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy \quad (2.45)$$

を考える。このとき、定義に従って偏微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(z) &= 2x + 2iy, & \frac{\partial}{\partial y} f(z) &= -2y + 2ix \\ \frac{\partial}{\partial z} f(z) &= \frac{1}{2}(2x + 2ix) - \frac{i}{2}(-2y - 2iy) = 2(x + iy) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) &= \frac{1}{2}(2x - 2ix) + \frac{i}{2}(-2y + 2iy) = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

が得られる。 $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 = z^2$ と表されることに注意すれば、 z と \bar{z} に関する偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = 2z = 2(x + iy), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0 \quad (2.47)$$

と簡単に求めることもできる。この結果からも明らかだが $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.48)$$

が成立しており、 $f(z)$ は \mathbb{C} の全域でコーシー・リーマンの関係式を満たす正則関数であることがわかる(正則関数であること自体は $f(z) = z^2$ と表されたことから、ただちにわかる)。

例. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.49)$$

を考える。既に見たように、この複素関数は $z \neq 0$ ではコーシー・リーマンの関係式を満たすので、 $z \neq 0$ では正則である。また、 $z = 0$ では微分可能ではなく、 $z = 0$ が特異点になっている。以上の結果は、

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z} \quad (2.50)$$

となっていることから理解できる。

さて、 $f(z) = \bar{z}$ のようなすべての領域で正則ではないような複素関数は、いたるところが特異点になっている。そのため、特異点について議論することあまりありがたみはなさそうである。一方、複素平面上のほとんど領域で正則になっているが、一部ではそうでないような関数を考えると、どの領域でどういう特異点を持つかは、複素関数を特徴づける本質的な重要を担っているように思われる。この期待が実際に正しいことを後に見ることになる。

◇ 正則関数の例

これまでいくつかの例で正則関数を扱ってきた。ここでは、もう少し系統的に正則関数の例を与えよう。

(1) **多項式関数**： z の単項式 $a_n z^n$ ($a_n \in \mathbb{C}$) は正則である。正則関数の和や差は正則関数なので、最も単純な正則関数として

$$P_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad (2.51)$$

という**多項式関数**があることがわかる。多項式関数は \mathbb{C} 全体 ($z = \infty$ は除く) で正則である。

(2) **有理関数**： 正則関数の商は分母がゼロになる特異点を除いて、正則関数になるのであった。したがって、多項式関数同士の商として定義される**有理関数**

$$R_{n,m}(z) = \frac{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0}{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0} \quad (2.52)$$

もまた分母がゼロとなる点を除いて正則である。ただし、(分子とキャンセルしない) 分母のゼロ点は特異点になっており、そのような z において有理関数は正則ではない。

(3) **指数関数**： 複素数を引数にもつ**指数関数**を

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y) \quad (2.53)$$

で定義しよう (後に別の定義との関係も議論する)。この関数もコーシー・リーマンの関係式を満たすことが確認でき、 \mathbb{C} 全体で正則であることがわかるが、さらに次の性質を満たすことが示される：

- **導関数**： $\frac{d}{dz} e^z = e^z$
- **指数法則**： $e^{z+w} = e^z e^w$
- **周期性**： $e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z})$
- **ゼロ点の非存在**： すべての z に対し $e^z \neq 0$

周期性以外はどれも実関数 e^x ($x \in \mathbb{R}$) が満たしていた性質に他ならない。

(4) **三角関数・双曲線関数**： 複素数を引数にもつ三角関数を

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \quad (2.55)$$

で定義する。 $e^{\pm iz}$ が正則であること、ならびに正則関数の和・差もまた正則であることを用いると、これらが \mathbb{C} 全体で正則関数であることがわかる (ただし、 $\tan z$ については $\cos z = 0$ を満たす z は特異点となり、正則ではないことに注意)。同様に、双曲線関数を

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad (2.56)$$

で定義すると、これらも \mathbb{C} 全体で正則関数であるとわかる (ただし、 $\tanh z$ については $\cosh z = 0$ を満たす z は特異点となり、正則ではない)。上式からわかるように、三角関数と双曲線関数は

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z, \quad (2.57)$$

を満たしている。したがって、複素関数まで拡張すると、三角関数・双曲線関数が指数関数を通して統一的に理解されたことになる。また、指数関数と同じく、実関数としての三角関数・双曲線関数が満たしていた関係式は、複素関数として満たすことが確認できる。

(5) 対数関数： 指数関数 $z = e^w$ の逆関数として $w = \log z$ という対数関数を定義したい。ただし、指数関数の周期性に付随して、対数関数ではこれまでの正則関数には見られなかった微妙な点が現れる。これを見よう。

まず、 z と w について、それぞれを $z = re^{i\theta}$ と極表示し、 $w = x + iy$ と表そう。逆関数 $w = x + iy$ を求めるためには、 x, y を r, θ を用いて表せばよい。指数関数の周期性に注意してこれを実行すると

$$re^{i\theta} = e^x e^{iy} \Leftrightarrow r = e^x, \theta = y - 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \log r, y = \theta + 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.58)$$

が得られる ($e^{i\theta} = e^{iy}$ から $\theta = y$ とならず、 $\theta = y - 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z})$ となることに注意、ここで \mathbb{Z} は整数の集合を表す)。したがって、 $z = re^{i\theta}$ としたときに、対数関数を

$$\log z := \log r + i\theta + 2\pi in \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.59)$$

と定義するのがよさそうに思われる。

しかし、この右辺は n としてどの整数を持ってくるのかを指定しないと定まっていなことに注意してほしい。上の式では整数 n の定め方を与えていないのははなマークをつけておいた。ここで、

通常関数 := 「1つの数に対し1つの数を〈一意に〉定める対応規則」

として定義されるのが普通であることを思い出そう。このよ「1つの数に対して1つの数を一意に定める」という性質を強調したいとき、(通常)関数のことを**一価関数**と呼ぶ。一方、上で与えた $\log z$ の定義(2.59)は右辺 n が任意の整数として未定のため、ある複素数 z に対して $\log z$ は一意に値が決まっていない。このような1つの引数に対して複数の値を与える「関数」のことを**多価関数 (multi-valued function)**と呼び、一価関数と区別をする。

多価関数はそのままで不便なので、ここではその取り扱いをもう少し考えておこう。多価関数を記述する方法は大まかにわけて次の2つのやり方がある：

(i) 偏角の取る値の範囲を制限する

1つ目の取り扱い方は式(2.59)に現れる偏角 θ の取りうる範囲を1周期分カバーするように適当に制限することである。選び方には任意性があるが、よく使われるのは

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{または} \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (2.60)$$

という選び方である。ちなみに一般には $a \in \mathbb{R}$ として $a \leq \theta < a + 2\pi$ とすることができる。 a の選び方は、偏角にとっての「日付変更線」をどこに引くかという人が決めるルールに過ぎないので、定めたルールを適切に使い続ければ問題は生じない。

ここでは偏角の取る値を $-\pi \leq \theta < \pi$ としたものを選び、

$$\text{Log } z := \log r + i\theta, \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (2.61)$$

と定義しよう。このように、偏角の範囲を制限して定義した対数関数 $\text{Log } z$ のことを、 $\log z$ の**主値 (principal value)**と呼ぶ。 $\text{Log } z$ は $x < 0$ を負の実数として

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \text{Log}(x + i\epsilon) = \log|x| + i\pi, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \text{Log}(x - i\epsilon) = \log|x| - i\pi \quad (x < 0) \quad (2.62)$$

を満たすため、 $\theta = -\pi$ と π の間での不連続な飛び

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \text{Log}(x + i\epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \text{Log}(x - i\epsilon) = 2i\pi \quad (2.63)$$

を持つ。したがって、 $\text{Log } z$ は負の実軸上では正則ではないが、それ以外の点では正則である。

(ii) 関数の値域の空間を広げる

2つ目の取り扱いでは、偏角に $2\pi\mathbb{Z}$ の分だけの不定性が出たことを「より積極的に」捉える。つまり、複素関数の値が取る空間 (= 値域) を1枚の \mathbb{C} だけに制限すると不定になることに注目し、複素平面 \mathbb{C} を複数枚導入して偏角の $2\pi\mathbb{Z}$ の \mathbb{Z} は何枚目の複素平面かを指定するのに用いる。ただし、偏角が $\pm 2\pi$ 変わると、お互いの複素平面は行き来できるように定義する必要がある。お互いの複素平面は日付変更線 (たとえば実軸の負の領域) を上下に貼ってつながっているものとする。このようにして一般化された関数の値域を与える複数枚の複素平面を「リーマン面」と呼ぶ。ここで、 $\log z$ の偏角の不定性は整数の分だけあるので、リーマン面の枚数は加算無限枚だけ必要になる。リーマン面を使った解析は数学的色合いの強い数理物理で役立つことがあるが、この講義ではあまり扱わないことにする。

(第5回ここまで, 2023/11/06)

(6) 累乗関数: $z = w^2$ の逆関数として定義される $w = \sqrt{z}$ などの無理関数を考えたい。これもまた、 $z = re^{i\theta}$, $w = Re^{i\phi}$ などと表して R と ϕ を r, θ で表せば逆関数が求まる。実際にやってみると

$$z = w^2 \Leftrightarrow re^{i\theta} = R^2 e^{2i\phi} \Leftrightarrow R = \sqrt{r}, \quad \phi = \frac{1}{2}\theta + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{2.64}$$

が得られる。したがって、 $z = re^{i\theta}$ について、 \sqrt{z} は

$$\sqrt{z} := \sqrt{r} e^{\frac{1}{2}i\theta + i\pi n} \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{2.65}$$

と定義したくなる。しかし、はてなマークに示したように、この式は n の偶奇に応じて返す値が異なる2価関数になっていることがわかる。したがって、対数関数のときと同様にして、正確な定義を与えるためには、

- (i) 偏角の取る範囲を定めて主値を導入するか、
- (ii) リーマン面 (いまの場合は2枚で済む) を導入して定義する

必要がある。

上の \sqrt{z} の例からただちに、一般の累乗関数 z^α についても α の値によっては多価関数になっていることが想像できる。これらは α の値によって何価の多価関数なのかが異なり、一々定義を与える必要があるとしたらかなり煩わしい。しかし、実はこれらの累乗関数は対数関数を用いて統一的に扱える。これを見るためには、

$$z^\alpha = e^{\log z^\alpha} = e^{\alpha \log z} \tag{2.66}$$

と表せることを思い出せばよい。この最右辺に多価関数 $\log z$ の表式を代入すると、 $z = re^{i\theta}$ について

$$z^\alpha = e^{\alpha(\log r + i\theta) + 2\pi i \alpha n} \quad \text{with } n \in \mathbb{Z} \tag{2.67}$$

が得られる。 α が整数のときは $e^{2\pi i \mathbb{Z}} = 1$ より z^α は一意に定まっているが、有理数 q/p のときには p 価関数、無理数のときには無限多価関数になっている。そこで、多価関数になるのは避けるためには、対数関数の項で説明した2つの方法のいずれかを用いれば良い。

この講義では主に (i) の方法を用いるので、 $\log z$ の主値を用いて累乗関数 z^α を

$$z^\alpha := e^{\alpha \text{Log } z} = e^{\alpha(\log r + i\theta)} \quad -\pi \leq \theta < \pi \tag{2.68}$$

と定義したものをを用いる。 $\log z$ の主値は $\text{Log } z$ として区別した文字を使ったが、累乗関数についてはその区別ができない記法になっていることに注意しておく。

さて、式(2.63)で示したように、 $\text{Log } z$ は負の実軸上 $x < 0$ において不連続性を持つのであった、このことから、累乗関数も多価関数となっているときには負の実軸上に不連続性を持つことが示される。実際、対数関数の不連続性を用いると

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (x \pm i\epsilon)^\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} e^{\alpha \text{Log}(x \pm i\epsilon)} = e^{\alpha(\log|x| \pm i\pi)} = |x|^\alpha e^{\pm i\alpha\pi} \tag{2.69}$$

が得られる。したがって、 z^α は $z = x < 0$ という負の実軸を $\theta = \pi$ と $\theta = -\pi$ とまたぐ際に

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (x + i\epsilon)^\alpha - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (x - i\epsilon)^\alpha = |x|^\alpha (e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}) = 2i|x|^\alpha \sin \alpha\pi \quad (2.70)$$

という不連続性を持っていることがわかる。 α が整数のときは 1 価関数なので、不連続性を持たないが、たとえば $\alpha = 1/2$ のときは $2i|x|^\alpha$ の不連続性を持つことがわかる。したがって、 z^α の主値は $z < 0$ の領域で正則ではないことがわかる。

ちなみに、(ii) の方法で累乗関数を記述することももちろん可能である。その場合、 p 価関数の場合には p 枚のリーマン面の導入で済むが、 $\log z$ のように無限多価関数になっている場合には加算無限枚のリーマン面を導入する必要がある。

物理への応用例. 2次元磁性体と磁気スキルミオン解: 量子論に基づいた物性物理学の進展によって、磁石の正体は「〈スピン〉と呼ばれるベクトルの向きが揃った状態」として理解されるに至った。具体的には、物質中の結晶格子の上に、スピンという長さが定まったベクトルが局在しているものと考え、結晶格子点上のベクトルが一斉にある方向を向いたものが磁性体であると考えられる。

このような磁性体の有効的な記述として長さが 1 に規格化された 3 次元ベクトル

$$\mathbf{n}(x, y) = \begin{pmatrix} n^1(x, y) \\ n^2(x, y) \\ n^3(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{ただし } |\mathbf{n}(x, y)| = 1 \quad (2.71)$$

を用いたものがある。いま、2次元的な磁性体を考え、結晶格子を連続体で近似することにより、空間の各点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ にスピンの向きを与える $\mathbf{n}(x, y)$ というベクトル場を考えることにした。これは、電磁気学において時空の各点で電場と呼ばれる $\mathbf{E}(t, x, y, z)$ という〈場〉を考えたのと同様の考え方である。

さて、磁性体のモデルとしてそのエネルギーが

$$E[\mathbf{n}] = \int dx dy \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right] \quad (2.72)$$

で与えられる場合を考える (\cdot はベクトル \mathbf{n} に対する内積。以下ではベクトル \mathbf{n} に対する外積 \times も用いる)。熱力学によると一定温度の状態では〈ヘルムホルツの自由エネルギー〉 $F = E - TS$ が最も小さくなる状態が実現するはずである。ここで、 T は温度、 S はエントロピーを表す。いま、温度が低い極限では自由エネルギーに現れる TS の項は限りなく小さくなるため、エネルギー E が小さくなる状態が実現する。そこで、エネルギーが小さくなるような $\mathbf{n}(x, y)$ の配位について考えたい。

エネルギーが小さい状態を求めるために、「平方完成」を用いてみよう。そのために、不等式

$$F := \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right) \quad (2.73)$$

を考えてみる。この F はベクトルの 2 乗に他ならないので、必ず $F \geq 0$ という自明な不等式を満たす。いま、ベクトル解析で習う公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (2.74)$$

などを用いて不等式 (2.73) の左辺を整理すると

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \cdot \left(\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right) + \left(\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right) \cdot \left(\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} - 2 \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

が得られる。ただし、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ を x や y で偏微分することで得られる $\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} = 0 = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}$ も用いた。この結果を用いると、エネルギーは

$$E[\mathbf{n}] = \int dx dy \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \int dx dy F \quad (2.76)$$

と表される。式 (2.73) に定義したように、 F はあるベクトルの 2 乗であり、事前に宣言したように「平方完成」が行われたことになる。このとき、 F は常に $F \geq 0$ となるために、エネルギーに対する次の不等式が得られる：

$$E[\mathbf{n}] \geq 4\pi Q \quad \text{with} \quad Q := \int dx dy \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right) \quad (2.77)$$

ここに定義した Q は〈トポロジカル電荷〉と呼ばれるものの一種になっており、(証明は省略するが) $Q \in \mathbb{Z}$ と整数になることを示すことができる。ここに与えた「平方完成によって得られる不等式」は他の理論モデルの解析などでも適用できることがある。

さて、不等式の等号が成立してエネルギーが小さくなる状態の候補を求めよう。等号が成立するのは F に現れるベクトル自体がゼロベクトルになっているときなので、

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} - \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} = 0 \quad (2.78)$$

という〈Bogomol'ny 方程式〉と呼ばれる式が得られる。これらの式はベクトル \mathbf{n} との外積を考えるともう一方の式が得られるので、等価な式になっている。ここで、 $z := x + iy$ という複素座標を導入して

$$f(z) := \frac{n^1 + in^2}{1 + n^3} = u + iv \quad \text{with} \quad u := \frac{n^1}{1 + n^3}, \quad v := \frac{n^2}{1 + n^3} \quad (2.79)$$

という複素関数 $f(z)$ を定義しよう。そこで、実部と虚部についての偏微分を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[(1 + n^3) \frac{\partial n^1}{\partial x} - n^1 \frac{\partial n^3}{\partial x} \right] = \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[\frac{\partial n^1}{\partial x} + \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \right]^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[(1 + n^3) \frac{\partial n^1}{\partial y} - n^1 \frac{\partial n^3}{\partial y} \right] = \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[\frac{\partial n^1}{\partial y} + \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right]^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[(1 + n^3) \frac{\partial n^2}{\partial x} - n^2 \frac{\partial n^3}{\partial x} \right] = \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[\frac{\partial n^2}{\partial x} - \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \right]^1 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[(1 + n^3) \frac{\partial n^2}{\partial y} - n^2 \frac{\partial n^3}{\partial y} \right] = \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[\frac{\partial n^2}{\partial y} - \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \right]^1 \end{aligned} \quad (2.80)$$

が得られる。ここで、ベクトル (の外積) の a 成分目を取ることを $|\cdot|^a$ で表した。いま、Bogomol'ny 方程式を用いると外積を消去できることに注意すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[\frac{\partial n^1}{\partial x} + \frac{\partial n^2}{\partial y} \right] = \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{(1 + n^3)^2} \left[-\frac{\partial n^1}{\partial y} + \frac{\partial n^2}{\partial x} \right] = \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.81)$$

が得られる。つまり、Bogomol'ny 方程式を満たすとき、複素関数 $f(z)$ はコーシー・リーマンの関係式を満たす正則関数であることがわかった。

さて、トポロジカル電荷が $Q \neq 0$ となる Bogomol'ny 方程式の解を考えてみよう。このような解は、境界条件 (トポロジカル電荷) を固定したときの (エネルギーが低い) 安定な解を与えており、**〈Bogomol'yi-Prasad-Sommerfield (BPS) 状態〉** などと呼ばれる。BPS 状態はエネルギーが最小の状態ではないが、電荷 Q が整数であることから、エネルギーの極小を与えるような解となっており、実験的にも実現しうると考えられる。このような解として、たとえば

$$f(z) = \frac{1}{z} \Leftrightarrow n^1 = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad n^2 = -\frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad n^3 = \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \quad (2.82)$$

という解がある。各点 (x, y) において、ベクトル \mathbf{n} の成分が求まっているので、これを図示したものを図 5 に与えた。このような解は **〈磁気スキルミオン (magnetic Skymion あるいは baby Skymion)〉** と呼ばれ、磁性体中での実現が観測されたことから、近年の物性物理で盛んに研究されている。

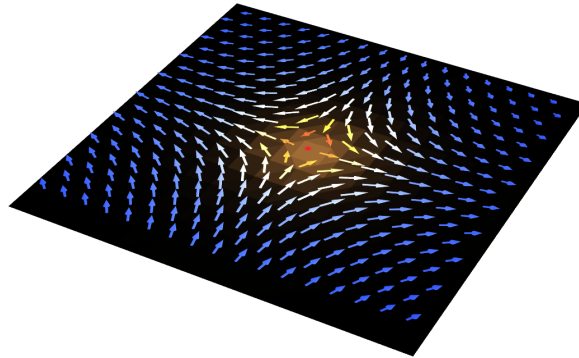


図 5. 磁気スキルミオン解 $f(z) = \frac{1}{z}$ において、ベクトル場 $\mathbf{n}(x, y)$ を図示した様子。

(第 6 回ここまで, 2023/11/13)

余談. 〈2次元共形対称性とコーシー・リーマンの関係式〉

物理におけるコーシー・リーマンの関係式の応用例を考えよう。伝統的な応用例の 1 つとして「2次元空間中の完全流体の運動の記述」があるが、現在ではそこまでアクティブな研究分野ではないと思うので、このノートではスキップする。その代わりに、現代物理においてコーシー・リーマンの関係式は特に**共形場理論 (Conformal Field Theory, 略して CFT)** や**弦理論**の研究で用いられるので、以下ではこれについて軽く説明をする。試験などには出さないで、気楽に読んでほしい。

前提事項として、現代物理では**〈場の理論〉**という定式化が標準的な理論手法を与えることに注意しておく。場の理論では、電磁気学において時空の各点に付随する**〈電磁場〉**という関数 $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ が力学変数を与えていたことに倣い、一般に

時空の各点に存在する**〈場〉**を力学変数として考え、その時空発展を記述する

という考えに基づいた理論的記述を与える。具体的には、考えている物理現象を記述する場を $\varphi(t, \mathbf{x})$ としたとき、場 $\varphi(t, \mathbf{x})$ の運動方程式を解析し、その解が (t, \mathbf{x}) の関数としてどのようにふるまうかを調べることになる。場の具体例としては電磁場のような例の他に、湯川 秀樹が導入した核力の担い手となるパイ中間子の場だったり、さらには電子や陽子などの物質粒子に対しても対応する場を考えることができる。

さて、場の運動方程式とその解を調べるための直接的な方法は、もちろんその方程式を解くことである。しかし、運動方程式を解かないでわかることもある。そのような方法の 1 つとして、場が (t, \mathbf{x}) の関数としてどういう条件を満たすのかを調べるために、 (t, \mathbf{x}) という座標系を取り替える変換を考えてみよう。いま、特に定常解を考え、場は時間座標に依存しないものとする。さらに、空間は 2次元のユークリッド空間 \mathbb{R}^2 を考える。このとき、直交座標系の基底ベクトルを $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^t$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^t$ として、

位置座標を \boldsymbol{x} を

$$\boldsymbol{x} := x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{つまり } x^1 = x, x^2 = y) \quad (2.83)$$

と成分表示しよう. このとき, $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ と \boldsymbol{x} をつなぐ微小な線分の長さを **線素 (line element)** と呼び, ds^2 と表す. 三平方の定理を用いると, いまの場合の線素は

$$ds^2 := (dx)^2 + (dy)^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{with} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

と与えられる. ここで, 導入した g_{ij} は **計量 (metric)** と呼ばれる量で, 一般に基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ と表したときに, $g_{ij} := \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ で定義される量である. いま用いている直交座標系では $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)^t$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)^t$ なので, 基底ベクトルが規格直交化されており, その内積から g_{ij} が上式の行列で与えられることがわかる. また, 計量の逆行列として g^{ij} を定義する. 直交座標系でその成分は同じで,

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

である. 以下では, いちいち添字に関する和の記号を明記するのは面倒なので, 上下で同じ添字が出たときにはその和を取るという **(アインシュタインの) 縮約記法** を用いることにする. たとえば,

$$g_{ij} dx^i dx^j := \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.86)$$

という略記を用いていく. ちなみに, アインシュタインの名前から想像されるとおり, ここで導入した縮約記法, 線素・計量などの概念は時間方向まで含めて一般化されることで **相対性理論** で中心的に使われる.

さて, 古典力学でデカルトの直交座標系を用いても極座標系を用いてもよかったように, 物理現象を記述するための座標系は自分の好きに取れるはずである. そこで, 上で与えた直交座標系から違う座標系に取り替えることを考える. 以下, 座標変換後の座標の成分が x'^i となったものとしよう. このような変換は基底を

$$\boldsymbol{e}_i \rightarrow \boldsymbol{e}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \boldsymbol{e}_j \quad (2.87)$$

と \boldsymbol{e}_i から \boldsymbol{e}'_i に取り替えることによって引き起こされる. したがって, この変換のもとで計量と逆計量は

$$g_{ij} \rightarrow g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}, \quad g^{ij} \rightarrow g'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} g^{kl} \quad (2.88)$$

と変換することがわかる.

いま, 計量は基底ベクトルの内積として定義されていたことを思い出すと, 計量は基底ベクトルが持つ「長さ」と「角度」の情報を持っていることがわかる. したがって, 新しい座標系でも「長さ」と「角度」を同じように測るためには, 基底を取り替える前後で計量が同じ形になること, つまり

$$g'_{ij} = g_{ij} \Leftrightarrow \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl} = g_{ij} \quad (2.89)$$

を要請するとよい. 回転変換はこのような関係を満たす例になっている. 実際, 回転変換を施し, 新しい座標系 $(x', y')^t$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

と回転行列 R を用いて表してみると、行列 R の性質から、

$$R^i_k R^j_l g_{ij} = g_{kl} \quad (2.91)$$

を満たすことが確認できる。これは、たとえば $(k, l) = (1, 1)$, $(k, l) = (1, 2)$ として、

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 R^i_1 R^j_1 g_{ij} &= R^1_1 R^1_1 g_{11} + R^2_1 R^2_1 g_{22} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 = g_{11} \\ \sum_{i,j=1}^2 R^i_1 R^j_2 g_{ij} &= R^1_1 R^1_2 g_{11} + R^2_1 R^2_2 g_{22} = \cos \theta (-\sin \theta) + \sin \theta \cos \theta = 0 = g_{12} \end{aligned} \quad (2.92)$$

のように具体的に計算して示すことができる。

以上の考え方をさらに一般化して、

座標変換の前後で「基底ベクトルがなす角度は同じだが、長さは保たれない」

という場合を考えてみよう。このような座標変換を〈共形変換〉(あるいは等角写像)と呼ぶ。このとき、変換後の座標を

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \Leftrightarrow x' = u(x, y), y' = v(x, y) \quad (2.93)$$

と表して、これが共形変換となるための条件式を考えてみよう。

計量の定義 $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ を思い出すと、角度のみを保つという条件は変換後の計量 g'_{ij} について係数がずれることまで許して $g'_{ij}(x) = \Omega(x)g_{ij}(x)$ とすればよい。つまり、計量の変換則を思い出して、

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl} = \Omega(x)g_{ij}, \quad \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} g^{kl} = \Omega(x)^{-1}g^{ij} \quad (2.94)$$

を要請する。2つ目の式で (i, j) を適当に選んだ式を用いて Ω を消去すると、 $g'^{11} = g'^{22}$ や $g'^{12} = g'^{21} = 0$ が条件式になっていることがわかる。ここで、 $x^i = (x, y)^t$ と $x'^i = (u(x, y), v(x, y))^t$ を思い出すと、この条件式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.95)$$

と表される。いま、変数変換のヤコビ行列がゼロでないとき、少なくともいずれかの成分はゼロではない。そこで、たとえば $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ のときを考えると2つ目の式から

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (2.96)$$

が得られる。これを1式目に代入すると

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (2.97)$$

が得られる。両辺で共通因子が出ていることに着目すると、この式から

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \pm \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.98)$$

という条件式が得られる。さらに、この関係式を条件式 (2.96) に代入すると、

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \mp \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.99)$$

が得られる。よって、角度のみを保つという条件をまとめると、

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{または} \quad (ii) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.100)$$

と求まる。条件 (i) は $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として定義された複素関数に関するコーシー・リーマンの関係式に他ならない。したがって、2次元空間で考えている座標変換がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき、その変換は共形変換 (あるいは等角写像) を与える。また、条件 (ii) は

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.101)$$

を思い出すと、条件 (ii) $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ とわかる。このように、 $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ を満たす関数を **反正則関数** と呼ぶ。以上から、**正則関数または反正則関数の実部・虚部で表される座標変換は、2次元空間における共形変換 (あるいは等角写像) を与えることがわかる。** 図 6 に $f(z) = z^2$ としたときの共形変換を図示した。このようにして、正則関数 (あるいは反正則関数) を用いて、「基底ベクトルがなす角度は同じだが、長さは保たれない」という共形変換を生成することができる。

では、共形変換はどのようなときに役立つだろうか。日常的に見られる物理現象を記述する一般の場の理論 (電磁気学や素粒子の標準模型, あるいは統計力学で考えるようなスピン系) について、このような共形変換を考えると場の運動方程式とその解は一般に形を大きく変える。実際、座標系の長さをぐにゃぐにゃ変えるような変換をして、物理現象が「同じに見える」という例は明らかに例外的であることが想像できるだろう。しかし、共形変換のもとで場の運動方程式とその解が「不変」になる特別な場の理論が存在する。このような場の理論を **共形場理論** と呼ぶ。このような例外的な状況は、現代物理において、統計力学モデルの臨界現象や弦理論の研究において現れ、場の運動方程式を解かなくとも、共形変換のもとでの「不変性」を用いて、様々なふるまいを解析することができる。

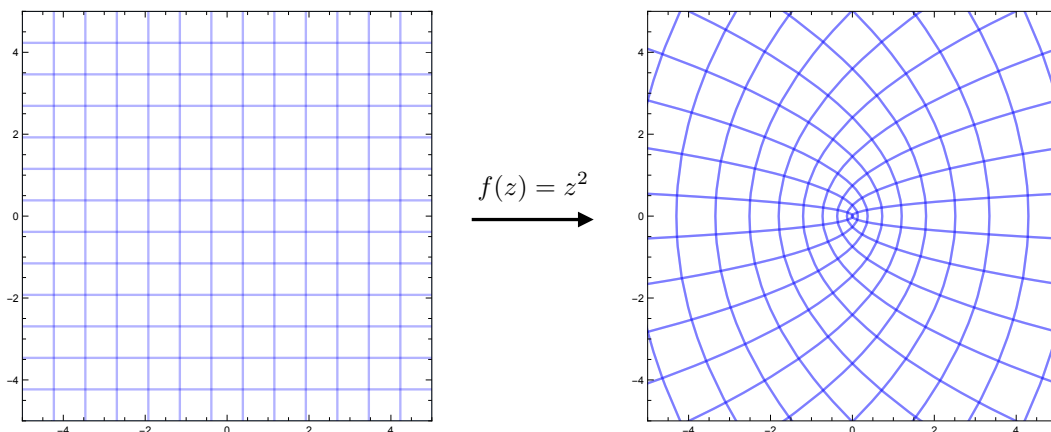


図 6. 共形変換の例: $f(z) = z^2$ とした場合.

[複素解析] 演習問題 2 (2023 年 11 月 6 日 (月) 出題, 2023 年 11 月 12 日 (日) 17 時提出締め切り)

問 1 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ について, $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が以下の式で与えられるとする. このとき, $f(z)$ を z と \bar{z} を用いて表わせ.

$$(1) \begin{cases} u(x, y) = xy + 1 \\ v(x, y) = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} u(x, y) = \frac{x+1}{x^2+y^2+2x+1} \\ v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2+2x+1} \end{cases} \quad (3) \begin{cases} u(x, y) = e^{-x} \cos y \\ v(x, y) = -e^{-x} \sin y \end{cases}$$

問 2 問 1 の (2) で与えられた複素関数について, 次の極限值を求め, 標準形 $a + ib$ の形で表わせ.

$$(1) \lim_{z \rightarrow 1} f(z) \quad (2) \lim_{z \rightarrow 1+2i} f(z) \quad (3) \lim_{z \rightarrow -1} f(z)$$

問 3 問 1 の (1)-(3) で定義された複素関数について, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$, ならびに $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$, $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}$ をそれぞれ求めよ. また, その結果からどの関数が複素関数として微分可能か (つまりコーシー・リーマンの関係式を満たすか) を示せ.

問 4 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則なとき, コーシー・リーマンの関係式を用いて, 次式が成立することを示せ:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = 0 \quad (2.102)$$

解答例.

問 1 $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ やオイラーの公式などを用いて計算していくと以下のとおり:

$$(1) f(z) = \left[\frac{1}{4i}(z + \bar{z})(z - \bar{z}) + 1 \right] + i \left[\frac{1}{4}(z + \bar{z})^2 - \frac{1}{4}(z - \bar{z})^2 \right] = -\frac{i}{4}(z^2 - \bar{z}^2) + i\bar{z}z + 1$$

$$(2) f(z) = \frac{x+1-iy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x+1-iy}{[(x+1)+iy][(x+1)-iy]} = \frac{1}{x+iy+1} = \frac{1}{z+1}$$

$$(3) f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y) = e^{-x}e^{-iy} = e^{-(x+iy)} = e^{-z}$$

ここで (2) と (3) の解答例では, 素直に $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ を代入するのではなく, 整理した形を見抜いて計算を行った. ただし, 一般の複素関数について, このように簡約化した形を見抜けるとは限らないので, 素直に $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ を代入して整理することも必要である.

問 2 $f(z) = 1/(z+1)$ と求めたことを用いると, 以下のように計算できる:

$$(1) \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow 1+2i} f(z) = \frac{1}{2+2i} = \frac{1}{2} \frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{4}$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow -1} f(z) = \infty$$

問3 問1の結果も用いながら、定義にしたがって計算していくと以下の通り：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{i}{2}z + i\bar{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2}\bar{z} + iz, \\
 (2) \quad & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-(x+1)^2 + y^2}{[(x+1)^2 + y^2]^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2(x+1)y}{[(x+1)^2 + y^2]^2}, \\
 & \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(x+1)y}{[(x+1)^2 + y^2]^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-(x+1)^2 + y^2}{[(x+1)^2 + y^2]^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{(z+1)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \\
 (3) \quad & \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x} \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x} \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x} \cos y, \\
 & \frac{\partial f}{\partial z} = -e^{-z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,
 \end{aligned}$$

したがって、(2) と (3) ではコーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

が成立していることが確認でき、複素関数として微分可能であることがわかる [ただし、(2) では $z = -1$ となる点は除く]。くりかえしになるが、複素関数としての微分可能性、つまり正則関数かどうかは $f(z)$ が z だけの関数になっているかでも判別できるので、この結果自身は問1の結果から既に読み取れるものだった。

問4 コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

から $u(x, y)$ または $v(x, y)$ を消去すればよい。具体的には1つ目の関係式を x 微分したものと2つ目の関係式の y 微分したものをそれぞれ引くことで

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

が得られる。同様にして、1つ目の関係式を y 微分したものと2つ目の関係式の x 微分したものをそれぞれ足すことで $v(x, y)$ が満たす式も

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

が得られる。

補足. 〈調和関数〉コーシー・リーマンの関係式は2つの2変数実関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ の間の関係式を与えているが、問4で求めたように $u(x, y)$ (あるいは $v(x, y)$) のみで閉じた関係式を求めると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = 0 \quad (2.103)$$

が得られる。これらの式は2次元空間中のラプラス方程式になっており、その解は数学において〈調和関数〉と呼ばれる。つまり、正則関数の実部と虚部はそれぞれ調和関数になっていることがわかる。

3 複素関数の積分 1：コーシーの積分定理

◇ 複素関数の積分

微分に引き続き、この節では複素関数の積分を考えたい。まず、1変数の実数値関数 $u(x)$ の定積分を思い出すと、これは

$$\int_a^b dx u(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x_n u(x_n) \quad \text{with} \quad \begin{cases} \Delta x_n := x_{n+1} - x_n \\ a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \end{cases} \quad (3.1)$$

として定義されていた。これは実関数 $u(x)$ の関数形と端点 $x = a$ と $x = b$ さえ与えれば一意に定まるものとして定義されている。

一方、複素関数 $f(z)$ は $z = x + iy$ と実数で考えると2変数関数になっているため、そもそものように積分を定義すべきかは注意が必要である。実際、1変数の実関数と異なり、端点 $z = \alpha$ と $z = \beta$ を決めても、どのような経路で積分を定義するか定めないと dz などの定め方がわからない。そこで、多変数関数の線積分のように、複素関数の積分を〈複素平面上の経路に沿った積分〉として定義することにしよう。

まず、複素平面上での曲線 C により、経路を記述する方法を与えておこう。ここで、曲線 C はパラメータ表示を用いて

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{with} \quad a \leq t \leq b \quad (3.2)$$

という実数 t から複素数 $z(t)$ への関数 $z = z(t)$ により記述できることを思い出そう。パラメータ t を「時刻」と解釈すると、時刻 t での複素平面での位置を $z(t)$ で記述していることになり、この時刻を $a \leq t \leq b$ の範囲で動かしたときに描く軌跡により経路を定めていることになる(図7の左図参照)。このとき、 $z(a)$ や $z(b)$ を曲線 C の始点と終点と呼ぶことにする。

さて、曲線については様々な曲線を考えることができる。たとえば、曲線 C について始点と終点が一致している場合は図7の右図で与えたような閉じた曲線(閉曲線)を考えることができる。さらに、2つの曲線 C_1 と C_2 について、 C_1 の終点と C_2 の始点が一致しているとき、これを組み合わせた曲線 $C := C_2 C_1$ を考えることができる。これは、 C_1 と C_2 を繋いだ曲線に他ならない。また、逆に考えると、一般の曲線 C はその部分曲線に分割することもできる。

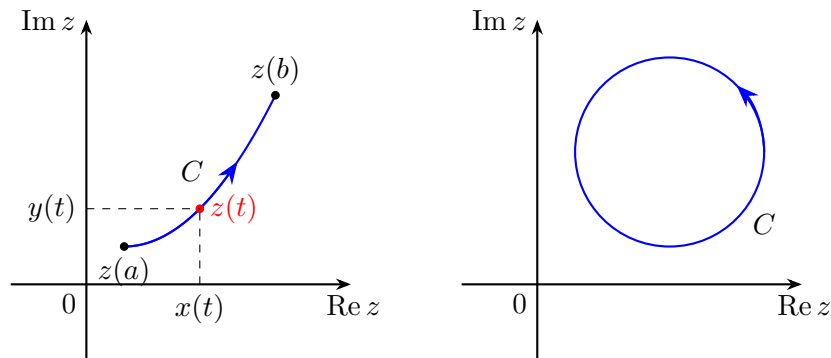


図7. 左図：複素平面上の経路。右図：閉曲線としての円周とその向き。

さて、考える曲線を一般的にしておくことで議論がむずかしくなるので、ある程度の制限を加えておこう。この講義では曲線 C として、これを $C = C_n \dots C_2 C_1$ と部分曲線 C_i に分割したときに、それぞれの部分曲線 C_i はなめらかになっていることを仮定しよう。ただし、曲線のつなぎ目ではなめらかじゃなくてもよいものとする。以下で具体的に見ていくように、典型的には線分や円周の一部などをつないで得られる曲線に沿った積分を考える。また、円周や長方形のように閉じた曲線(単純閉曲線と呼ばれる)を頻繁に考えるが、曲線の向きとして「閉曲線で囲われる内側を左手に見るように向きづけ」を採用する。たとえば、閉曲線として円周を考える場合には、向きは反時計回りにまわるものとして定義する(図7の右図参照)。

以上の準備に基づいて、複素積分を曲線に沿った線積分として定義しよう。具体的には、曲線のパラメータ表示 $C: z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) が与えられたとして、実関数のときの定義 (3.1) に倣って

$$\int_C dzf(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta z_n f(z(t_n)) \quad \text{with} \quad \Delta z_n := z(t_{n+1}) - z(t_n) \quad (3.3)$$

として定義する。証明は省略するが、曲線 C がなめらかなとき、この右辺の極限が存在し、次式が成立することを示すことができる：

$$\bullet \text{ 複素積分： } \int_C dzf(z) = \int_a^b dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t)) \quad (3.4)$$

したがって、複素関数の積分を定義に従って実行するには、式 (3.4) を計算すればよいことがわかる。右辺には $z(t)$ のパラメータ t に関する微分が含まれるため、経路のパラメータ表示も指定しないと計算ができないことに注意が必要である。曲線 C が区分的になめらかになっているときの複素積分は、 $C = C_n \cdots C_1$ と分割して、

$$\int_C dzf(z) := \int_{C_1} dzf(z) + \int_{C_2} dzf(z) + \cdots + \int_{C_n} dzf(z) \quad (3.5)$$

と定義する。まあ、経路 C が閉曲線になっている場合には、閉じた曲線上の周回積分であることを強調するために

$$\oint_C dzf(z) \quad (3.6)$$

と表すことが多い。以上から、複素関数の積分は複素平面上の曲線に沿った線積分として定義され、

- **被積分関数：** 複素関数 $f(z)$ の関数形
- **積分経路：** 経路を定める曲線 $C: z = z(t)$

の2つを与えることで定まる量になっている。特に、経路を与える曲線 C のみを与えられた場合、曲線のパラメータ表示 $C: z = z(t)$ を自分で定めて計算を進める必要があることに注意しよう。

さて、複素関数の積分は実関数のときと同じように、形式的には $dz = dx + idy$ という無限小の量があるとして変形することができる。したがって、 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と併せて、実部と虚部に分けると

$$\begin{aligned} \int_C dzf(z) &= \int_C (dx + iy) [u(x, y) + iv(x, y)] \\ &= \int_C [udx - vdy] + i \int_C [vdx + udy] \end{aligned} \quad (3.7)$$

と表すこともできる。

では、定義にしたがって、複素関数の積分をいくつかの例について実際に行ってみよう。

例. 複素関数 $f(z) = z$ について、図7の左図のように、曲線 $C =$ 半径 $R (> 0)$ の円周を反時計周り1周としたときの複素積分を計算してみよう。このような曲線は極表示を用いて $C: z(t) = Re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) と表すことができる。よって、 $\frac{dz(t)}{dt} = iRe^{it}$ を用いて、以下のように計算される：

$$\oint_C dzf(z) = \int_0^{2\pi} dt Rie^{it} Re^{it} = iR^2 \int_0^{2\pi} dt e^{2it} = iR^2 \left[\frac{1}{2i} e^{2it} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (3.8)$$

例. 上の例と同じ円周を経路として複素関数 $f(z) = \bar{z}$ の積分を考えると次のとおり：

$$\oint_C dzf(z) = \int_0^{2\pi} dt Rie^{it} Re^{-it} = iR^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i R^2 \quad (3.9)$$

例. 複素関数 $f(z) = z$ を図 7 の右図のように 4 点 $z = 0, a, a + ib, ib$ を頂点に持つ長方形を反時計周りに 1 周したときの複素積分を計算してみよう. 曲線 $C = C_4C_3C_2C_1$ と分けるとそれぞれのパラメータ表示はたとえば,

$$\begin{cases} C_1: z(t) = t & (0 \leq t \leq a) \\ C_2: z(t) = a + it & (0 \leq t \leq b) \\ C_3: z(t) = a + ib - t & (0 \leq t \leq a) \\ C_4: z(t) = i(b - t) & (0 \leq t \leq b) \end{cases} \quad (3.10)$$

と与えることができる. . . したがって, これを用いて次のように計算される:

$$\begin{aligned} \oint_C dz f(z) &= \int_0^a dt t + \int_0^b dt i(a + it) + \int_0^a dt (-1)(a + ib - t) + \int_0^b dt (-i)i(b - t) \\ &= \frac{1}{2}a^2 + i \left(ab + i \frac{b^2}{2} \right) - \left((a + ib)a - \frac{a^2}{2} \right) + \left(b^2 - \frac{b^2}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

例. 上の例と同じ長方形の経路を用いて, 複素関数 $f(z) = \bar{z}$ を積分すると次のとおり:

$$\begin{aligned} \oint_C dz f(z) &= \int_0^a dt t + \int_0^b dt i(a - it) + \int_0^a dt (-1)(a - ib - t) + \int_0^b dt (-i)(-i)(b - t) \\ &= \frac{1}{2}a^2 + i \left(ab - i \frac{b^2}{2} \right) - \left((a - ib)a - \frac{a^2}{2} \right) - \left(b^2 - \frac{b^2}{2} \right) \\ &= 2iab \end{aligned} \quad (3.12)$$

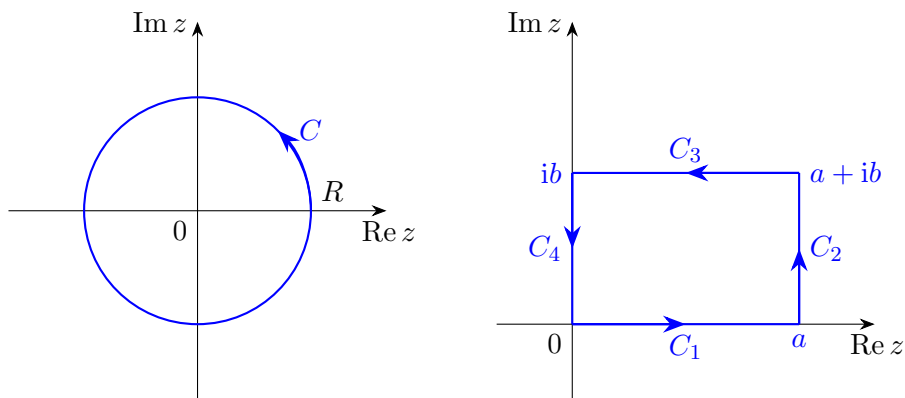


図 8. 左図: 円周を経路と取ったもの. 右図: 長方形を経路と取ったもの.

◇ コーシーの積分定理

前節の例で扱った簡単な複素積分の例を見ていると, なんらかの規則があるように思われる. 実際, 半径 R の円の面積が πR^2 , 横幅と縦幅がそれぞれ a, b の長方形の面積が ab であることを思い出そう. すると, z の積分結果と \bar{z} の積分結果から

$$\oint_C dz z = 0, \quad \oint_C dz \bar{z} = 2i \times (\text{閉曲線 } C \text{ の囲む図形の面積}) \quad (3.13)$$

が成立しているように見える．この推察が正しいとすると，一般の複素関数 $f(z)$ の複素積分に関して，きれいな定理が成立していることを期待させる．

この期待に基づいて，実部・虚部が C^1 級の一般の複素関数 $f(z)$ を 4 点

$$z = x_0 + iy_0 (= z_0), \quad x_0 + a + iy_0, \quad x_0 + a + i(y_0 + b), \quad x_0 + i(y_0 + b) \quad (3.14)$$

を頂点に持つ長方形を反時計周り 1 周する閉曲線の複素積分を計算してみよう (図 7 の右図の原点を z_0 にずらしたもの)．閉曲線を $C = C_4C_3C_2C_1$ と分けるとそれぞれのパラメータ表示はそれぞれ

$$\begin{cases} C_1 : z(t) = z_0 + t & (0 \leq t \leq a) \\ C_2 : z(t) = z_0 + a + it & (0 \leq t \leq b) \\ C_3 : z(t) = z_0 + a + ib - t & (0 \leq t \leq a) \\ C_4 : z(t) = z_0 + i(b - t) & (0 \leq t \leq b) \end{cases} \quad (3.15)$$

によって定まる．よって，これを使って複素積分の定義を書き換えていくと

$$\begin{aligned} & \oint_C dz f(z) \\ &= \int_0^a dt f(z_0 + t) + \int_0^b dt i f(z_0 + a + it) + \int_0^a dt (-1) f(z_0 + a + ib - t) + \int_0^b dt (-i) f(z_0 + i(b - t)) \\ &= \int_0^a dt [f(x_0 + iy_0 + t) - f(x_0 + a - t + i(y_0 + b))] + i \int_0^b dt [f(x_0 + a + i(y_0 + t)) - f(x_0 + i(y_0 + b - t))] \\ &= \int_{x_0}^{x_0+a} dx [f(x + iy_0) - f(x + i(y_0 + b))] + i \int_{y_0}^{y_0+b} dy [f(x_0 + a + iy) - f(x_0 + iy)] \\ &= \int_{x_0}^{x_0+a} dx \int_{y_0}^{y_0+b} dy \frac{\partial}{\partial y} [-f(x + iy)] + i \int_{y_0}^{y_0+b} dy \int_{x_0}^{x_0+a} dx \frac{\partial}{\partial x} [f(x + iy)] \\ &= 2i \int_{x_0}^{x_0+a} dx \int_{y_0}^{y_0+b} dy \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x + iy) \end{aligned} \quad (3.16)$$

が得られる．ここで，前節で $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right]$ と定義したことを思い出すと，長方形の内部を $D \in \mathbb{C}$ として，上の結果は

$$\oint_C dz f(z) = 2i \int_D dx dy \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) \quad (3.17)$$

が成立することを意味している．

(第 7 回ここまで, 2023/11/20)

以上の結果を一般化して， C を任意の区分的になめらかな閉曲線， S を C が囲む図形となっているとき (これを図形の境界を取る操作を ∂ とし， $\partial S = C$ と表す) を考える．このとき，なめらかな閉曲線で囲まれた領域 S は微小長方形の和で近似的に表すことができ，この極限として一般の区分的になめらかな閉曲線の場合を考えることができる．このとき，重なっている逆向き経路の線積分の寄与が消えることを考慮すると

$$\oint_C dz f(z) = 2i \int_S dx dy \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) \quad (3.18)$$

が成立することを示すことができる．したがって，ここまでの結果をまとめた以下の定理が得られる：

定理. <グリーンの公式> 複素関数 $f(z)$ の実部・虚部が C^1 級の 2 変数実関数だとする．区分的になめらかな閉曲線 C とし，その内部を S と表したとき (つまり $\partial S = C$)，複素関数 $f(z)$ の積分について以下が成り立つ：

$$\oint_C dz f(z) = 2i \int_S dx dy \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) \quad (3.19)$$

グリーンの公式の特別な場合として $f(z) = z$ や $f(z) = \bar{z}$ と取れば、確かに

$$\oint_C dz z = 0, \quad \oint_C dz \bar{z} = 2i \int_S dx dy = 2i \times (\text{閉曲線 } C \text{ の囲む図形の面積}) \quad (3.20)$$

を満たす。また、 $f(z) = z$ のときはゼロになるため、例から推察した結果 (3.13) が確かに成り立っていることがわかる。

さて、グリーンの公式において、複素関数 $f(z)$ は実部・虚部が x, y について微分可能である以外の制限はないが、考えている領域で $f(z)$ が正則関数のときは、さらに単純化された次の結果を得る：

定理. 〈コーシーの積分定理〉 区分的になめらかな閉曲線 C とし、その内部を S と表したとき (つまり $\partial S = C$)、複素関数 $f(z)$ がこれらの領域で正則だとする。このとき、以下が成り立つ：

$$\oint_C dz f(z) = 0 \quad (3.21)$$

以下で見るように、このコーシーの積分定理が複素関数論に関する定理の中で、概念的にも実用的にも最も大事な定理の1つになっている。

◇ 複素積分の計算規則

さて、式 (3.4) に与えたように、複素積分の計算は定義に従って線積分として計算することができるが、実際にこれを実行するのはめんどろなことが多い。しかし、単純な閉経路に関する複素積分は

(a) $(z - \alpha)^n$ の複素積分

(b) 積分経路の変形

という2つの結果を組み合わせると、簡単に計算できることが多い。コーシーの積分定理の応用として、このようなを見てみよう。

(a) $(z - \alpha)^n$ の複素積分. 閉経路 C とその内部全体で正則な関数については、コーシーの積分定理で計算が可能だが、一部で正則ではないときはどうなるだろうか。このような場合として、次の例を考えてみよう。

例. 整数 $n \in \mathbb{Z}$ について、複素関数 $f(z) = (z - \alpha)^n$ を

C : $z = \alpha$ を中心とした半径 $R (> 0)$ の円を反時計周りに1周した経路

について複素積分することを考えてみよう。

まず、 $n \geq 0$ のとき、 $f(z) = (z - \alpha)^n$ は \mathbb{C} 全体で正則なので、任意の閉経路に沿った複素積分はゼロになる。一方、 $n < 0$ のときは $z = \alpha$ で正則ではなく積分経路の内部に特異点を含んでいるため、単純にコーシーの積分定理を適用するわけにはいかない。そこで、積分経路を $C: z(t) = \alpha + Re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) とパラメータ表示しよう。このとき、 $\frac{dz(t)}{dt} = iRe^{it}$ となることから、定義に従って計算すると

$$\oint_C dz f(z) = \int_0^{2\pi} dt i R e^{it} (R e^{it})^n = i R^{1+n} \int_0^{2\pi} dt e^{i(1+n)t} = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases} \quad (3.22)$$

が得られる。

上の例から、 $(z - \alpha)^n$ の複素積分について、特異点を持つ $n < 0$ 場合にその特異点を囲む複素積分を考えても、 $n = -1$ のときにしか有限にならないことがわかった。この結果は後の計算で決定的に重要になるので、正の場合も含めて命題としてまとめておこう：

命題. $\langle (z - \alpha)^n$ の複素積分 \rangle 整数 $n \in \mathbb{Z}$ について, $f(z) = (z - \alpha)^n$ の複素積分は以下で与えられる:

$$\oint_C dz (z - \alpha)^n = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases} \quad (3.23)$$

ただし, 積分経路 C は $z = \alpha$ を中心とする半径 R の円周を反時計回りに 1 周まわる経路である.

(b) **積分経路の変形.** さて, $(z - \alpha)^n$ の複素積分で複素積分がゼロにならない場合に注目してみよう. すると, $f(z) = \frac{1}{z - a}$ という複素関数について, 原点を囲む半径 R の円周を積分経路に取って積分が

$$\oint_C dz \frac{1}{z - a} = 2\pi i \quad (3.24)$$

となるのだった. $f(z)$ は原点で正則ではないため, 右辺がゼロではなくなっているのだが, 積分結果が経路の半径 R に依らないことに注意しよう. つまり, 特異点 $z = a$ を囲む円周であれば, どんな半径の円であっても結果が同じになることを意味している.

「ゼロになるものは勝手に付け足してよい」という考え方や「トータルでゼロになるような複素積分を経路に分解する」という考え方をを用いると, 以上の結果はさらに一般化することができ

被積分関数が正則な領域で経路を自由に変形しても, 複素積分の結果は変わらない

ことを示すことができる. 具体的には経路 C を微小変形して $C' = C + \delta C$ としたものとしよう. このとき, 新たに付け加えた δC の内部で $f(z)$ が正則ならばコーシーの積分定理を用いることができ

$$\int_{C'} dz f(z) = \int_{C + \delta C} dz f(z) = \int_C dz f(z) + \underbrace{\oint_{\delta C} dz f(z)}_{=0} = \int_C dz f(z) \quad (3.25)$$

が成立する. これをくりかえすことで, 被積分関数が正則な領域であれば好きに経路を変形することができる. 上の例でみた積分経路を与える円周の半径を変えても積分結果が変わらなかったのは, この経路変形の結果として理解できる. また, δC とその内部に正則でない領域を含む場合は, 付け足された部分がゼロにならないため, 「特異点をまたぐような積分経路の変形は許されない」ことがわかる.

あるいは $f(z) = \frac{1}{z - a}$ のような $z = a$ に特異点を持つ関数の複素積分を例として, 次のように経路変形を考えることができる. いま, 図 9 に示したような積分経路 $C = C_4 C_3 C_2 C_1$ を取ると, この経路 C が囲む閉領域 (上側に切れ目が入ったドーナツの内側) には特異点は含まれていない. したがって, コーシーの積分定理から

$$0 = \oint_C dz f(z) = \int_{C_1} dz f(z) + \int_{C_2} dz f(z) + \int_{C_3} dz f(z) + \int_{C_4} dz f(z) \quad (3.26)$$

ここで, ドーナツの切れ目が一致する極限を考えると経路 C_2 と C_4 は被積分関数が正則な領域で同じ位置を逆向きに走る経路になるため, 経路 C_2 と C_4 からの積分の寄与はキャンセルしてゼロになる. 一方, 経路 C_1 と C_3 は半径が異なる円周の経路を与えるが, 円周上を反時計回りにまわる向きを正に取っていたことを思い出すと,

$$\oint_{|z-a|=R_1} dz f(z) = \oint_{|z-a|=R_2} dz f(z) \quad (3.27)$$

が得られる. ただし, $\oint_{|z-a|=R_1} dz$ は, 中心が $z = a$ の半径 R_1 の円周上を反時計回りに 1 周まわる経路に関する複素積分を表すこととした. このようにして, 閉じた経路に関して複素積分の経路は正則な領域でかなり自由に変形することができる.

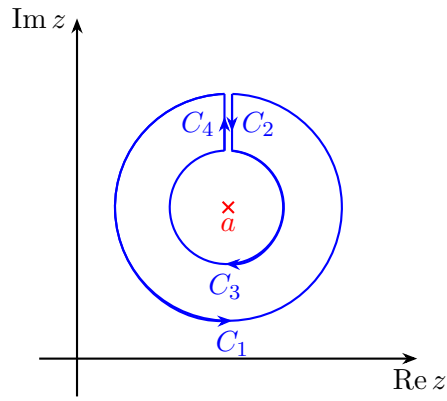


図 9. $z = a$ に特異点を持つ複素関数についての積分経路.

ここまでの議論から示される〈複素積分に関する計算規則〉をまとめておくと、以下の通り：

〈複素積分に関する計算規則〉

- コーシーの積分定理から、被積分関数が正則な閉じた領域を囲む複素積分はゼロ
- 正則な領域で同じ位置にある逆向き経路を考えると、順向きの結果に (-1) 倍したものが得られる
- 積分経路は被積分関数が正則な領域では自由に変形できるが、特異点をまたぐ変形は許されない
- 式 (3.23) にある $(z - \alpha)^n$ の積分公式

◇ コーシーの積分定理の応用

では、式 (3.4) に与えた定義に従った計算の代わりに、前節の計算規則を用いて、単純な閉経路に関する複素積分を計算してみよう。基本的な方針は

- 積分経路の変形
- $(z - \alpha)^n$ の積分

の 2 ステップに持ち込むことである。

例. 図 10 に示すような楕円 $C : x^2/4 + y^2 = 1$ を反時計まわりに 1 周囲む経路について、複素積分

$$J := \oint_C dz \frac{2z}{z^2 - 1} \quad (3.28)$$

を実行したい。定義から直接従う式 (3.4) に基づいて、たとえば楕円のパラメータ表示 $z = 2 \cos t + i \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を用いてとして計算しようとする

$$J = \int_0^{2\pi} dt (-2 \sin t + i \cos t) \frac{2(\cos t + i \sin t)}{(2 \cos t + i \sin t)^2 - 1} \quad (3.29)$$

となり、かなりめんどろに見える。しかし、特異点 $z^2 - 1 = 0$ を解いて $z = \pm 1$ にあることを考慮すると、2 つの特異点を囲む複素積分の和に取り替えられる。実際、部分分数分解を施してから、積分経路の

変形を行えば以下のように評価できる：

$$\begin{aligned}
 J &= \oint_C dz \left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \right] \\
 &= \oint_C dz \frac{1}{z+1} + \oint_C dz \frac{1}{z-1} \\
 &= \oint_{|z+1|=R} dz \frac{1}{z+1} + \oint_{|z-1|=R} dz \frac{1}{z-1} \\
 &= 4\pi i
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

3行目では、被積分関数の特異点の位置に注意しながら、積分経路である楕円 C をそれぞれ中心が ± 1 の半径 R の円に積分経路に変形した。定義に従って計算する方法と比べて、むずかしい計算をまったく必要とせず結果が得られたことに注目してほしい。

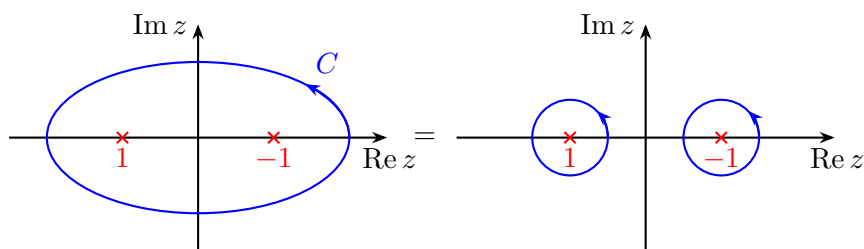


図 10. 楕円に沿った複素積分.

例. 原点を中心とする半径 2 の円 C について、複素積分

$$J := \oint_C dz \frac{1}{z^2 + 1} \tag{3.31}$$

を実行したい。被積分関数が、 $z^2 + 1 = 0$ を解いて $z = \pm i$ に特異点を持つことに注意して、図 11 のように経路変形をすると

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{i}{2} \oint_C dz \left[\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right] = \frac{i}{2} \left[\oint_C dz \frac{1}{z+i} - \oint_C dz \frac{1}{z-i} \right] \\
 &= \frac{i}{2} \left[\oint_{|z-i|=R} dz \frac{1}{z+i} - \oint_C dz \frac{1}{z-i} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

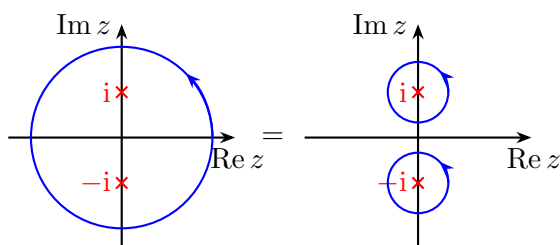
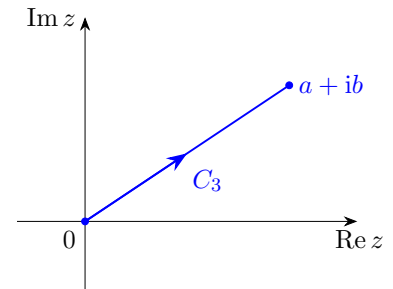
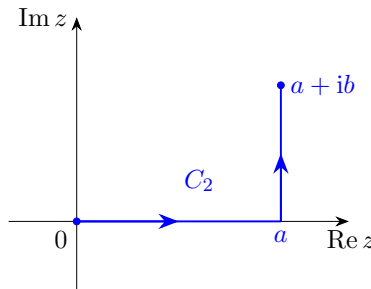
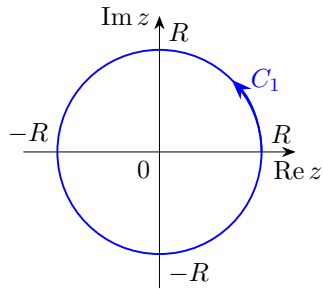


図 11. 円に沿った複素積分.

問 1 経路 C_1, C_2, C_3 として下図に示した経路を考える (C_1 は原点を中心とした半径 R の円周, C_2 と C_3 はそれぞれ線分, を矢印の向きに走る経路とする). このとき, 以下の問いに答えよ.

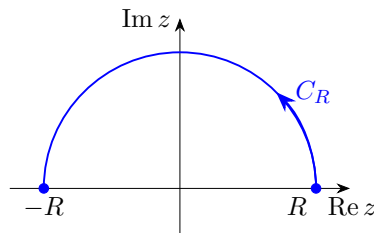
- (1) 経路 C_1, C_2, C_3 のそれぞれについてパラメータ表示 $z(t)$ を与えよ (それぞれ t の動く範囲も明示すること).
- (2) 前問の結果から, 複素積分の定義に従って次の積分を計算せよ.

$$(i) \oint_{C_1} dz \bar{z} \quad (ii) \int_{C_1} dz \frac{1}{z} \quad (iii) \int_{C_2} dz e^z \quad (iv) \int_{C_3} dz e^z$$



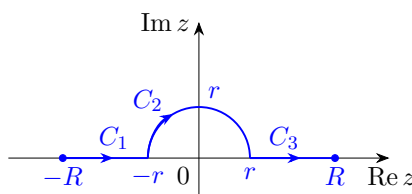
問 2 経路 C_R として半径 R の円に沿った偏角 $\theta = 0$ から $\theta = \pi$ までの半円 (下図参照) を考える. このとき, 複素積分の定義にしたがって, 次の複素積分を計算せよ (ただし, \sqrt{z} は主値とする).

$$(1) \int_{C_R} dz z^3 \quad (2) \int_{C_R} dz \frac{1}{z} \quad (3) \int_{C_R} dz \sqrt{z}$$



問 3 下図にある $z = -R$ と点 $z = R$ をつなぐ経路 $C := C_3 C_2 C_1$ を考える. ここで, C_1 と C_3 は線分, C_2 は原点を中心とした半径 r の半円を矢印の向きに走る経路である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 経路 C_1, C_2, C_3 のそれぞれについてパラメータ表示 $z(t)$ を与えよ (それぞれの経路について t の動く範囲も明示すること).
- (2) 前問 (1) の結果を用いて, 経路 C に関する複素積分 $\int_C dz \frac{1}{z}$ を定義に従って計算せよ.
- (3) 問 3 の経路 C の始点と終点は, 問 2 の経路 C_R の終点と始点にそれぞれ一致している. そこで, これらの経路を組み合わせて閉じた経路 $C' := C_R C$ という経路を考える. このとき, 問 2 と問 3 の結果を用いて, 複素積分 $\oint_{C'} dz \frac{1}{z}$ を求めよ.



解答例.

問 1 (1) 経路 C_1, C_2, C_3 は, たとえば以下のようなパラメータ表示 $z(t)$ で記述できる:

$$C_1 : z(t) = Re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$C_2 : z(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq a) \\ a + it & (0 \leq t \leq b) \end{cases}$$

$$C_3 : z(t) = \left(1 + \frac{ib}{a}\right)t \quad (0 \leq t \leq a)$$

パラメータ表示は一意ではないことを注意しておく. たとえば, C_1 については $z(t) = Re^{2it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) とも表すことができる. また, C_3 についても $\tan \theta = b/a$ を満たす θ を用いて, $z(t) = te^{i\theta}$ ($0 \leq t \leq \sqrt{a^2 + b^2}$) というパラメータ表示も可能である.

(2) 複素積分の定義に従って, 前問の結果を用いると以下のように計算できる:

$$(i) \oint_{C_1} dz \bar{z} = \int_0^{2\pi} dt i R e^{it} R e^{-it} = i R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i R^2$$

$$(ii) \int_{C_1} dz \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} dt i R e^{it} \frac{1}{R e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$$(iii) \int_{C_2} dz e^z = \int_0^a dt e^t + \int_0^b dt i e^{a+it} = e^a - 1 + e^a(e^{ib} - 1) = e^{a+ib} - 1$$

$$(iv) \int_{C_3} dz e^z = \int_0^a dt \left(1 + \frac{ib}{a}\right) e^{(1 + \frac{ib}{a})t} = \left[\left(1 + \frac{ib}{a}\right) \frac{1}{1 + \frac{ib}{a}} e^{(1 + \frac{ib}{a})t} \right]_0^a = e^{a+ib} - 1$$

ここで, e^z は正則関数なので, (iii) と (iv) の結果は一致していることに注意.

問 2 経路 C_R は $z(t) = Re^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) とパラメータ表示できる. よって, $\frac{dz}{dt} = iRe^{it}$ となることから, 複素積分の定義にしたがって計算すると以下の通り:

$$(1) \int_{C_R} dz z^3 = \int_0^\pi dt i R e^{it} (R e^{it})^3 = i R^4 \int_0^\pi dt e^{4it} = i R^4 \left[\frac{1}{4i} e^{4it} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

$$(2) \int_{C_R} dz \frac{1}{z} = \int_0^\pi dt i R e^{it} (R e^{it})^{-1} = i \int_0^\pi dt = i\pi$$

$$(3) \int_{C_R} dz \sqrt{z} = \int_0^\pi dt i R e^{it} (R e^{it})^{1/2} = i R^{3/2} \int_0^\pi dt e^{3/2 it} = i R^{3/2} \left[\frac{2}{3i} e^{3/2 it} \right]_{t=0}^{t=\pi} = -\frac{2}{3} R^{3/2} (1 + i)$$

問 3 (1) たとえば, 以下のようにパラメータ表示することができる:

$$\begin{cases} C_1 : z(t) = t - R & (0 \leq t \leq R - r) \\ C_2 : z(t) = r e^{i(\pi - t)} & (0 \leq t \leq \pi) \\ C_3 : z(t) = t + r & (0 \leq t \leq R - r) \end{cases}$$

(2) 複素積分の定義に前問 (1) のパラメータ表示を用いると

$$\begin{aligned} \int_C dz \frac{1}{z} &= \int_0^{R-r} dt \frac{1}{t - R} + \int_0^\pi dt (-i) r e^{i(\pi - t)} \frac{1}{r e^{i(\pi - t)}} + \int_0^{R-r} dt \frac{1}{t + r} \\ &= \left[\log |t - R| \right]_0^{R-r} - i \int_0^\pi dt + \left[\log |t + r| \right]_0^{R-r} \\ &= \left[\log r - \log R \right] - i\pi + \left[\log R - \log r \right] = -i\pi \end{aligned}$$

(3) 前問の結果を用いて, $\oint_{C'} dz \frac{1}{z} = \int_C dz \frac{1}{z} + \oint_{C_R} dz \frac{1}{z} = -i\pi + i\pi = 0$.

4 複素関数の積分 2: コーシーの積分公式・留数定理

◇ コーシーの積分公式

ある領域において正則な複素関数 $f(z)$ を考えよう. 前節までの結果を用いると, このような複素関数を積分形で表す次の結果を導出できる:

定理. 〈コーシーの積分公式〉 複素関数 $f(z)$ は領域 D とその境界で正則であるとする. このとき, ∂D は D の境界に沿った経路として, 以下の式が成立する:

$$f(z) = \oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad (4.1)$$

証明 いま, 被積分関数は $\zeta = z$ を除いて正則である. そこで, 積分経路 ∂D を変形して, $\zeta = z$ を囲む半径 ϵ の微小な円周 $C: \zeta(t) = z + \epsilon e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) に経路を変形することができる. そこで, 変形後の経路について, 複素関数の定義に従って計算すると

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \oint_C \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \epsilon e^{it} \frac{f(z + \epsilon e^{it})}{\epsilon e^{it}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(z + \epsilon e^{it}) \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(z) = f(z) \end{aligned} \quad (4.2)$$

となり, 示したい結果が得られる (まじめに評価すれば $\epsilon \rightarrow 0$ としたところの収束性も数学的にちゃんと示すことができる). □

◇ 特異点の分類

コーシーの積分定理は考えている領域全体で正則な関数の複素積分がゼロになることを主張していたが, $f(z) = \frac{1}{z-a}$ の積分の例で見たように, 特異点を含む領域の積分については必ずしもゼロにならない. しかし, 正則な領域では積分経路の変形が可能だったので, 特異点を含む場合の複素積分についても一般的かつ有用な結果を示すことができそうだという期待が湧いてくる.

この期待に基づいて, まずは特異点の中でも〈孤立特異点 (isolated singularity)〉と呼ばれるものの分類を行おう.

定義. 〈孤立特異点〉: 領域 D 上の複素関数 $f(z)$ に対して, $c \in D$ が孤立特異点であるとは, 十分小さな $\epsilon > 0$ に対して, $f(z)$ が $0 < |z - c| < \epsilon$ で正則であることを言う.

この定義は $z = c$ 直上でのふるまいについては触れていないことに注意してほしい. つまり, 孤立特異点は, 図 12 の灰色部分に示される $z = c$ のまわりで正則となっていることから定義される. 実際, $z = c$ のまわりで正則なので, $z = c$ にどんな特異点があるにしても (場合によっては特異点がなかったとしても), 他とは孤立した特異点になっていることを表している.

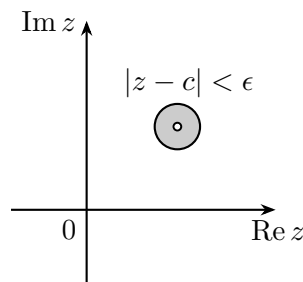


図 12. 孤立特異点の定義における正則となる領域.

さて、孤立特異点 c の近くでは、テイラー展開を負のべきまで許す形で

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n \quad (4.3)$$

という展開が可能であり、かつ展開係数 a_n は $f(z)$ から一意に定まることを示すことができる。これは〈ローラン展開〉と呼ばれるもので、次節で詳しく扱う。ここで、特異点の情報はテイラー展開には現れなかった

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-c)^n = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \frac{a_{-1}}{z-c} \quad (4.4)$$

の負のべきの展開部に含まれるだろう。これをローラン展開 (4.3) の〈主要部〉と呼ぶ。そこで、

孤立特異点の特異点としての情報 = 「展開係数が負のべき側にどこまで続くのか」

と考えることにして、孤立特異点を次のように分類する。

- (i) **取り除き得る特異点**：孤立特異点の定義が $z=c$ 直上のふるまいについては言及していないことを思い出すと、「主要部がゼロとなり、 $z=c$ で正則である」という自明な場合も上の孤立特異点の定義に含まれる。一見、非自明な特異点を持ちそうな場合として $f(z) = \sin z/z$ という関数は $z=0$ で特異点を持ちそうだが、 $\sin z$ の $z=0$ まわりのテイラー展開を思い出すと

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left[z - \frac{1}{3!}z^3 + \cdots \right] = 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots \quad (4.5)$$

となり、主要部がゼロになるので $z=0$ は取り除きうる特異点になっている。このとき、考えている点で複素関数は正則で、ローラン展開はテイラー展開と一致する。

- (ii) **k 位の極 ($k=1, 2, \dots$)**：主要部が有限個の項で記述され

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-c)^n = \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} \quad (4.6)$$

となっているとき、 $f(z)$ は $z=c$ に k 位の極を持つという。簡単な例として、 $f(z) = (z-c)^n$ は $n < 0$ のときは、 $z=c$ に n 位の極を持っている。

- (iii) **真性特異点**： $z=c$ における展開の主要部が無限個の項を持つ場合、 $z=c$ を**真性特異点**という。たとえば、 $f(z) = e^{1/z}$ という関数は、指数関数の展開を行うと

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots \quad (4.7)$$

となり、主要部が無限に続くため $z=0$ が真性特異点になっている。

◇ 留数定理とその実積分への応用

さて、 $(z-c)^n$ の複素積分をする際に有限で残るのは $n = -1$ の場合だけであったことを思い出すと、ローラン展開の中で a_{-1} という係数は重要な役割を果たしそうである。この期待に基づいて、係数 a_{-1} に名前を与えておこう：

定義. 〈留数〉複素関数 $f(z)$ について、孤立特異点 $z=c$ まわりでのローラン展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n \quad (4.8)$$

を考える。このとき、 $(z-c)^{-1}$ の展開係数 a_{-1} を $z=c$ における〈留数 (residue)〉と呼び、次の記号で表す：

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=c} f(z) \quad (4.9)$$

以上の定義に、積分経路の変形と $(z - c)^n$ の複素積分の結果を用いると、複素関数論でもっとも大事な定理の1つである以下の結果が示される：

定理. 〈留数定理〉 複素関数 $f(z)$ は単純閉曲線 C の内部に孤立特異点 c_1, \dots, c_N を持つ他は C とその内部で正則とする。このとき、 C に沿った $f(z)$ の複素積分は、以下のように留数の和で与えられる：

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{z=c_i} f(z) \quad (4.10)$$

留数定理は一見したところでは、どのように有用な結果なのかが少しわかりにくい。しかし、以下で見るように実積分の具体的な計算などにも応用が効く非常に強力な結果を与えており、現代物理では素粒子物理・物性物理問わず(グリーン関数を用いた)場の理論の解析計算を行う際に必須な結果となっている。この講義で扱う内容として、何を差し置いてもこの留数定理の内容と以下で扱う応用をちゃんと身につけておいてほしい。

さて、留数は孤立特異点 $z = c_i$ でのローラン展開の展開係数から求められる。とくに、孤立特異点が1位の極の場合には単に

$$\operatorname{Res}_{z=c_i} f(z) = \lim_{z \rightarrow c_i} (z - c_i) f(z) \quad (4.11)$$

として計算できる。以前見たように、式(4.10)の左辺にある積分を定義に従って計算すると一般に大変めんどろな計算になりうる。しかし、留数定理を用いれば、「留数を求める」という微分や代数計算のみで定まる操作によって積分結果を簡単に得ることができる。これが留数定理が実際の積分計算を行う上で有用になる理由を与えている。

留数定理の応用として、実関数の積分を実行してみよう。

例. 実関数の定積分として

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} \quad (4.12)$$

を考えてみよう。この積分は、すでに習った微積分の知識でも評価することができる。たとえば、 $x = \tan \theta$ と積分変数を変換すると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (4.13)$$

などとなることから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta = \pi \quad (4.14)$$

と評価できる。これを留数定理を用いてやり直してみよう。

被積分関数を複素平面まで拡張して $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ を考えると、この関数は $z = \pm i$ に1位の極をもつ。そこで、図13に示した上半平面を囲む積分経路 C_R について留数定理を適用すると

$$\oint_{C_R} dz \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \pi \quad (4.15)$$

が得られる。一方、積分経路 C は実軸上の積分ごとに寄与を分割すると

$$\oint_{C_R} dz \frac{1}{1+z^2} = \int_{-R}^R dx \frac{1}{1+x^2} + \int_{C'_R} dz \frac{1}{1+z^2} \quad (4.16)$$

ここで、上半平面を通る半径 R の円周を C'_R と表した。この式の左辺はすでに留数定理で計算しており、右辺の第 1 項は $R \rightarrow \infty$ で求めたい積分 I に帰着する。右辺の第 2 項は $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1$ を用いると

$$\left| \int_{C'_R} dz \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \int |dz| \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \int_0^\pi dt \frac{R}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (4.17)$$

と評価でき、 $R \rightarrow \infty$ でゼロになる。これらを合わせて、次のように積分結果が得られる：

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dx \frac{1}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} dz \frac{1}{1+z^2} \pi - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} dz \frac{1}{1+z^2} = \pi \quad (4.18)$$

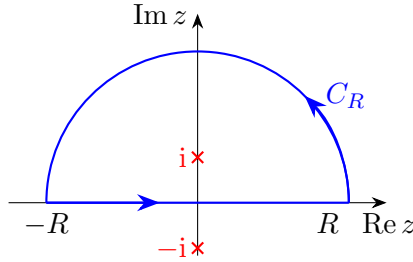


図 13. 上半平面を囲う積分経路.

この例で見たように、留数定理を応用して実関数の定積分を計算するためには

〈留数定理による積分計算の方針〉

- (1) 実行したい積分経路を含むような、適切な閉経路に沿った複素積分を考える。
- (2) 留数定理を用いて (1) で考えた複素積分を実行する。
- (3) 求めたい積分と留数積分の結果の差を評価する。

というステップに応じて計算を進めるのが定石である。(1) で適切な閉じた経路を考える際には、実行したい定積分の経路に加えて、複素積分の寄与がなるべくゼロになるような経路を付け足すことがポイントになる。

例. 上の例よりも少し複雑な例として、次の定積分を考えてみよう：

$$I := \int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^4} \quad (4.19)$$

被積分関数は偶関数なので、積分範囲を取り替える代わりに $1/2$ 倍して

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{1}{1+x^4} \quad (4.20)$$

とする。さて、 x を複素数 z まで拡張してみると、被積分関数は $1+z^4=0$ を解いて、

$$z = e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{-i\pi/4}, e^{-3i\pi/4} \quad (4.21)$$

に 1 位の極を持つことがわかる。また、被積分関数は $1+z^4$ を分母に持つため、上の例と同様にして上半平面を囲む積分経路を考えると、上半平面の無限に大きな半円上を走る経路からの積分への寄与はゼ

口になると評価できる。したがって、図 14 に示した経路に対して、留数定理を用いて

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} dz \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{2} 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname{Res}_{z=e^{3i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} \right] \\
 &= \pi i \underbrace{\left[-\frac{1}{4}e^{i\pi/4} - \frac{1}{4}e^{3i\pi/4} \right]}_{=-\frac{1}{4}i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

と求まる。

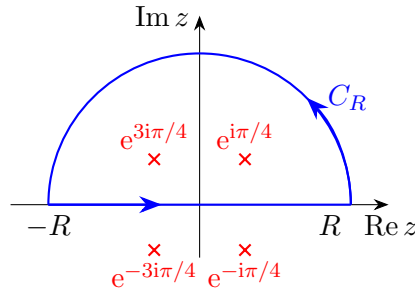


図 14. 上半平面を囲う積分経路.

(第 9 回ここまで, 2023/12/04)

◇ 留数定理の物理への応用

ここまでで得られた積分定理の物理への応用例をいくつか紹介しよう。

応用. フレネル積分 (ガウス積分の一般化) : 微積分で習った〈ガウス積分〉の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad \text{with } a > 0 \tag{4.23}$$

を思い出そう。この一般化として、係数 a を純虚数にした

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{ia}{2}x^2} \quad \text{with } a > 0 \tag{4.24}$$

という積分を考えてみよう。被積分関数は振動する複素数値を取る関数になっており、オイラーの公式を用いると

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\cos \frac{a}{2}x^2 - i \sin \frac{a}{2}x^2 \right] \quad \text{with } a > 0 \tag{4.25}$$

と表すことができる。振動関数を積分しているので、ゼロになるような気もするがこれは本当だろうか？

この積分を実行するために、複素関数 $f(z) = e^{-\frac{ia}{2}z^2}$ の積分を考えてみる。 $f(z)$ は複素平面全体で正則なので、コーシーの積分定理から閉じた経路に関する複素積分はゼロとなる。そこで、図 15 に示した

$$C_R = \begin{cases} C_1 : z = t & \text{with } -R \leq t \leq R \\ C_2 : z = Re^{-it} & \text{with } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ C_3 : z = -te^{-\frac{i}{4}\pi} & \text{with } -R \leq t \leq R \\ C_4 : z = Re^{it} & \text{with } \frac{3}{4}\pi \leq t \leq \pi \end{cases} \tag{4.26}$$

という閉じた経路を考えよう。このとき、コーシーの積分定理 (あるいは留数定理) から

$$0 = \oint_C dz f(z) = \int_{C_1} dz f(z) + \int_{C_2} dz f(z) + \int_{C_3} dz f(z) + \int_{C_4} dz f(z) \quad (4.27)$$

となるが、 C_2 と C_4 上の積分は $R \rightarrow \infty$ の極限で指数的に小さくなりゼロになる。一方、 C_1 と C_3 上の積分は、複素積分の定義に従ってそれぞれ

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} dz f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{ia}{2}t^2} = I \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} dz f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt (-e^{-\frac{i}{4}\pi}) e^{-\frac{ia}{2}t^2} e^{-\frac{i}{2}\pi} = -e^{-\frac{i}{4}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{a}{2}t^2} = -\sqrt{\frac{2\pi}{e^{\frac{i}{2}\pi} a}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

となる。ここで、 C_3 上の積分がただのガウス積分に帰着したことがポイントである。以上から、コーシーの積分定理から得られた結果で $R \rightarrow \infty$ とすると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{ia}{2}t^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{ia}} \quad \text{with } a > 0 \quad (4.29)$$

が得られる。つまり、ガウス積分の公式でそのまま $a \rightarrow ia$ としたものが成立していることが確認できる。また、上の結果は $e^{-i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ を用いて、実部と虚部に分解すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cos \frac{a}{2}x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin \frac{a}{2}x^2 \quad (4.30)$$

を与える。したがって、振動関数の積分ではあるが、ゼロにはならないことが確認できる。ガウス積分の一般化を与えている以上の積分は〈フレネル積分〉とも呼ばれることもある。

フレネル積分の公式 (4.81) はファインマンにより定式化された量子力学の経路積分形式を導出する際に頻繁に使われる。

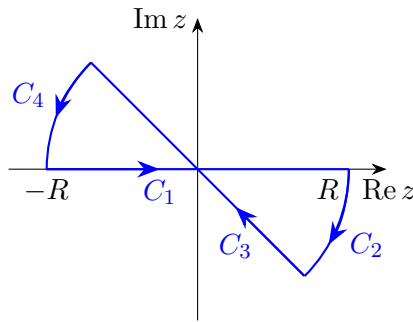


図 15. 積分経路 C_R .

例. 場の理論における留数定理の応用: 場の量子論の計算では、ファインマングリーン関数と呼ばれる ω と \mathbf{q} の関数を

$$iG(\omega, \mathbf{p}) := \frac{i}{\omega^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon} \quad (4.31)$$

と定義して、次のような積分をよく計算することになる。

$$\begin{aligned}
 I &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} iG(\omega, \mathbf{p}) \\
 J(\mathbf{k}) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}, \mathbf{q}) iG\left(\omega, \frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}\right) iG\left(-\omega, \frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

という積分を考えることが多くある [$g(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ は \mathbf{k}, \mathbf{q} の何らかの関数, $E_{\mathbf{p}}$ は, 相対論的な場の量子論では $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ であることが典型的]. d^3q 積分があるため, 少し複雑に見えるが, ω 積分はこの節で扱ってきた実関数の定積分と同じようにして, 留数定理を用いて積分を実行できる。

応用. 留数定理とウィック回転: この節のはじめに, 場の理論で現れる例として提示した1つ目の積分を考える. ただし, ω 積分のみを扱う形に単純化して,

$$I := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (m > 0)
 \tag{4.33}$$

という積分を考えよう. この積分を以下のように2通りのやり方で評価してみよう.

1つ目の計算方法は留数定理を用いて直接評価することである. いま, 被積分関数は $\omega = m - i\epsilon$ と $\omega = -m + i\epsilon$ に1位の極を持つ. ただし, ϵ は無限小の量であることから, ϵ の係数が1になるように再定義した. ここで, 上半平面を囲むように半径が無限大の積分経路を付け足しても, 余分な経路の寄与は半径無限大でゼロになり, 積分結果は変わらない. そこで, 図16の左図に示した上半平面を囲む経路について留数定理を適用すると

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{(\omega - m + i\epsilon)(\omega + m - i\epsilon)} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Res}_{\omega = -m + i\epsilon} \frac{1}{(\omega - m + i\epsilon)(\omega + m - i\epsilon)} \\
 &= -\frac{1}{2m}
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

と評価できる.

2つ目の方法は留数定理を用いて積分経路を変形して, 実軸上の積分から虚軸上の積分に移すことである. そのために, 今度は被積分関数の極 $\omega = m - i\epsilon$ と $\omega = -m + i\epsilon$ を囲まないような経路 C' として, 図16の右図に示した $C'_R = C_4 C_3 C_2 C_1$ を考える. 先ほどと同様にして, 半径が大きい極限で経路 C_2 と C_4 からの寄与はゼロになることが示される. さらに, いま考えている積分経路 C'_R は被積分関数の極を囲まないのでもーシーの積分定理 (あるいは留数定理) から

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C'_R} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{dt}{2\pi i} i \frac{1}{-t^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + m^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.35}$$

が得られる. 最右辺の第2項は虚軸上の積分からくる寄与を表している. 2行目に進む際には, 第2項の積分変数を t から ω に置き換え, さらに $\epsilon \rightarrow 0$ としても積分経路上に特異点が現れなくなったことを用いて, $\epsilon = 0$ とした. これより, 次の公式が得られる:

$$\text{ウィック回転: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + m^2}
 \tag{4.36}$$

式 (4.36) では、 ω^2 の前の符号が逆転していることが特徴的である。この公式は、積分経路を反時計回りに $\pi/2$ だけ回転させる操作と解釈することができ、場の量子論で〈ウィック回転 (Wick rotation)〉と呼ばれるものになっている。特異点が複素平面の第2象限 (左上) と第4象限 (右下) にあるために、積分経路の実軸を反時計回りには回せることに注意してほしい。式 (4.36) に現れる積分は、 $\omega = m \tan x$ と変数変換することで (あるいは留数定理を用いることで) ただちに実行でき、次の結果が得られる：

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + m^2} = -i \frac{1}{2im} = -\frac{1}{2m} \quad (4.37)$$

当然、1つ目の方法と一致した結果を出している。

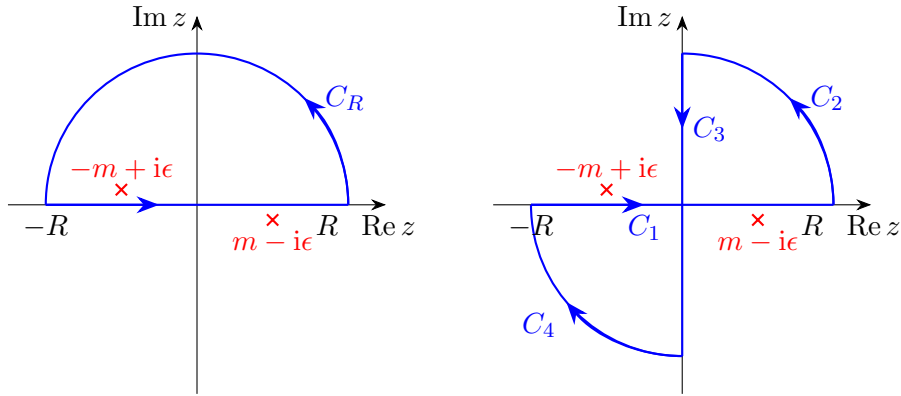


図 16. 2つの積分経路.

応用. ステップ関数の積分表示： 次の積分で定義される関数を考えよう。

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} \quad (4.38)$$

いつものように、複素関数まで拡張して $f(z) := \frac{1}{z - i\epsilon} e^{izt}$ を考える。 $\epsilon > 0$ より、この関数は上半平面の $z = i\epsilon$ という位置に1位の極を持ち、さらに留数は

$$\text{Res}_{z=i\epsilon} f(z) = \lim_{z \rightarrow i\epsilon} (z - i\epsilon) f(z) = e^{-\epsilon t} \quad (4.39)$$

与えられる。

さて、無限に大きな半円の経路をつけ足して、いつものように留数定理で評価することを考える。ただし、つけ足した積分の「無限に大きな半円からの寄与」がゼロになるかどうかには注意が必要である。この点に注意するために、 $z = x + iy$ を被積分関数に含まれる指数関数に代入すると $e^{izt} = e^{itx - ty}$ となる。したがって、この部分が指数的に小さくなるのは、 $t > 0$ のときは $y > 0$ 、 $t < 0$ のときは $y < 0$ である。よって、無限に大きな半円からの寄与が落ちるためには、図 17 に示したように、 $t > 0$ のときは上半平面を囲む半円、 $t < 0$ のときは下半平面を囲む半円を考える必要がある。このように t の正負に応じて適切な経路を選ぶことで、無限に大きな半円上の積分が寄与しないようにできる。したがって、留数定理を用いると

$$\begin{aligned} \bullet \quad t > 0 \text{ のとき: } \theta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R^+} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Res}_{z=i\epsilon} f(z) \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon t} = 1 \\ \bullet \quad t < 0 \text{ のとき: } \theta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R^-} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

が得られる．さらに， $t = 0$ のときは

$$\theta(t=0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega}{\omega^2 + \epsilon^2} + \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \epsilon^2} \right] \quad (4.41)$$

となるが，最右辺の第1項は奇関数を原点について対象に積分しているためゼロとなり，ひとつ前の例でやったように第2項の積分は $1/(2\epsilon)$ と評価できる．したがって， $t = 0$ の値は $\theta(t=0) = \frac{1}{2}$ と求まった．以上の結果をまとめると，積分により定義した関数 $\theta(t)$ は

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - i\epsilon} e^{i\omega t} = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ \frac{1}{2} & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.42)$$

と与えられることがわかった．このような関数のことを〈ヘヴィサイドのステップ関数〉と呼び， $\theta(t)$ で表すことが多い．

上の結果からわかるように，ヘヴィサイドのステップ関数はある点(上の例では $t = 0$) を境に0と1の間をジャンプするような関数を与えている．このような関数は，電気回路のスイッチをオンとオフで切り替えるときの「電圧の時間変化」や，場の理論において現れる〈遅延(先進)グリーン関数〉などを記述する際など，物理の様々な場面で用いられる．

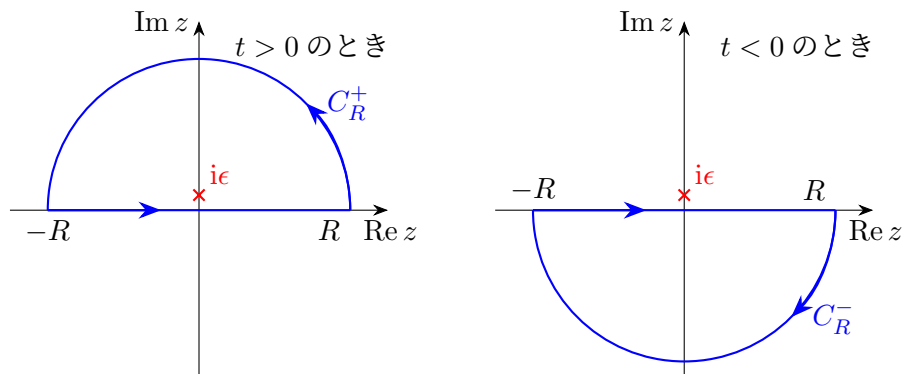


図 17. 2つの積分経路.

(第10回ここまで, 2023/12/18)

応用. 主値積分: いま，実関数 $f(x)$ が区間 $a \leq c \leq$ を満たす点 $x = c$ で特異点を持つと，

$$\int_a^b dx f(x) \quad (4.43)$$

という積分は不定になりかねない．そこで，この特異点直上に行ったときの寄与を避けるように，〈主値積分〉と呼ばれる量を

$$P \int_a^b dx f(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} dx f(x) + \int_{c+\epsilon}^b dx f(x) \right] \quad (4.44)$$

と定義してみよう．

いま，ある複素関数 $g(z)$ が上半平面で正則であるとき， $\frac{g(z)}{z + i\epsilon}$ は下半平面の $x = -i\epsilon$ で特異点を持つ．ここで $a < 0 < b$ として，この関数について実軸上の定積分を考えると，図 18 に示したように，正則な上半平面側に積分経路を少し変形することができる．したがって，微小な半円の寄与を定義にした

がって評価すると

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} g(x) &= \left[\int_a^{-\epsilon} dx + \int_{\epsilon}^b dx \right] \frac{1}{x} g(x) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 dt \epsilon e^{it} \frac{1}{\epsilon e^{it}} g(\epsilon e^{it}) \\ &= P \int_a^b dx \frac{1}{x} g(x) - i\pi g(0) \end{aligned} \quad (4.45)$$

が得られる。同様にして、分母を $x - i\epsilon$ とすると、第2項目の符号は逆符号になる。すると、デルタ関数を $\delta(x)$ として、以上の結果を次のようにまとめられる：

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = P \frac{1}{x} - i\pi \delta(x), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\epsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi \delta(x) \quad (4.46)$$

この関係式は以下の例で見ると、場の理論や非平衡統計力学でよく使われる。

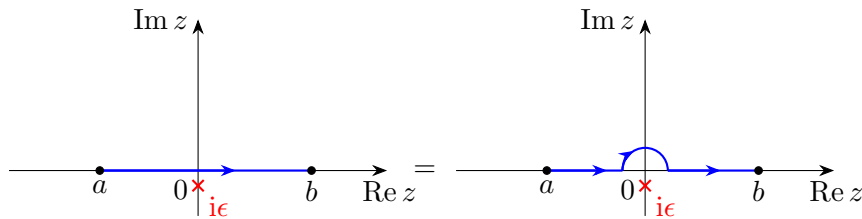


図 18. 2つの積分経路.

応用. 分散式: 遅延グリーン関数 $G_R(t)$ と呼ばれる量は $t \geq 0$ のみで値を持つため、ステップ関数 $\theta(t)$ とある関数 $\rho(t)$ のかけ算により

$$G_R(t) = i\theta(t)\rho(t) \quad (4.47)$$

と表すことができる。このとき、ステップ関数の積分表示を用いると、遅延グリーン関数のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} G_R(\omega) &= i \int dt e^{i\omega t} \int \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{e^{i\omega' t}}{\omega' - i\epsilon} \int \frac{dz}{2\pi} e^{-izt} \rho(z) \\ &= \int dz \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1}{\omega' - i\epsilon} \delta(\omega + \omega' - z) \rho(z) \\ &= \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{z - \omega - i\epsilon} \rho(z) \end{aligned} \quad (4.48)$$

と積分表示することができる。この結果に主値積分の公式を用いると

$$G_R(\omega) = P \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{z - \omega} \rho(z) + \frac{i}{2} \rho(\omega) \quad (4.49)$$

が得られる。したがって、 $\rho(z)$ が実関数のときは、

$$\text{Im } G_R(\omega) = \frac{1}{2} \rho(\omega) \quad (4.50)$$

という式が得られる。さらに、上で得られた式に代入することで

$$G_R(\omega) = \int \frac{dz}{\pi} \frac{1}{z - \omega - i\epsilon} \text{Im } G_R(\omega) \quad (4.51)$$

という式が得られる。この結果は〈分散式〉と呼ばれる関係式を与えており、統計力学や場の理論の研究で使われる。

応用. Kramers-Kronig 関係式：上半平面で正則な複素関数 $G_R(z)$ を考えよう (遅延グリーン関数のフーリエ表示を解析接続したものが典型)。このとき、コーシーの積分公式より、実軸と無限に大きな半円で作られる上半平面を囲む積分経路 C に対して

$$G_R(\omega) = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{G_R(z)}{z - \omega - i\epsilon} \quad (4.52)$$

が成立する。さらに関数 $G_R(z)$ は $|z| \rightarrow \infty$ で $f(z) \leq |z|^{-2}$ とふるまい、無限に大きな半円上の積分が寄与しないことを仮定しよう。すると、上で得られた主値積分の公式を用いて

$$G_R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{G_R(z)}{z - \omega - i\epsilon} = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{G_R(z)}{z - \omega} + \frac{1}{2} G_R(\omega) \quad (4.53)$$

が得られる。最右辺の第 2 項は左辺と同じものに比例しているので、移項して

$$G_R(\omega) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\pi i} \frac{G_R(z)}{z - \omega} \quad (4.54)$$

が得られる。この式の両辺について、実部と虚部を比べると

$$\text{Re } G_R(\omega) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\pi} \frac{\text{Im } G_R(z)}{z - \omega}, \quad \text{Im } G_R(\omega) = -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\pi} \frac{\text{Re } G_R(z)}{z - \omega} \quad (4.55)$$

という関係式が得られる。この関係式は上半平面で正則な関数 $G_R(z)$ の実部と虚部はお互い結びついていることを意味している。つまり、 $G_R(z)$ は実部がわかれば虚部が求まり、虚部がわかれば実部が求まる。この式 (4.55) は〈Kramers-Kronig 関係式〉と呼ばれ、統計力学や場の理論の研究でよく使われる式である。

応用. 湯川ポテンシャルの導出：電荷 q_1 の点電荷を位置 \mathbf{R}_1 に置いたとき、静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ の空間分布はポアソン方程式

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi(\mathbf{x}) = q_1 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) \quad (4.56)$$

により記述される (真空の誘電率 $\epsilon_0 = 1$ とした)。ここで、 $\mathbf{R}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ として、 $\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) = \delta(x - X_1)\delta(y - Y_1)\delta(z - Z_1)$ はデルタ関数の積である。このポアソン方程式の解を $\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1)$ と表そう。いま、静電ポテンシャル $\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1)$ が存在する空間に、さらに電荷 q_2 の点電荷を位置 \mathbf{R}_2 に置くことを考えると、静電エネルギーが

$$V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = q_2 \phi_{\text{sol}}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \quad (4.57)$$

だけ必要になる。このエネルギーは点電荷間に作用するポテンシャルとして理解され、実際に $V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)$ を求めるとクーロンポテンシャルが求まる。この問題を少し変形すると、ノーベル賞に繋がった湯川ポテンシャルの導出を追体験することができる。

そのために、ポアソン方程式の左辺に $m^2 (> 0)$ に比例する項を足し、

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2 \right] \phi(\mathbf{x}) = q_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) \quad (4.58)$$

という方程式を考えてみる。このとき、以下のステップにしたがって方程式を解くことで、粒子間に作用するポテンシャルエネルギーを求めてみよう。

- (1) 式 (4.58) の両辺に $\int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ を作用させ、両辺をフーリエ変換することを考える。これを部分積分を用いて整理すると、 $\phi(\mathbf{x})$ のフーリエ変換は次のように求まる：

$$\tilde{\phi}_{\text{sol}}(\mathbf{k}) := \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) = q_1 \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_1}}{m^2 + \mathbf{k}^2} \quad (4.59)$$

- (2) 式 (4.59) のフーリエ逆変換を実行すると、式 (4.58) の解を

$$\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) = q_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{R}_1)}}{m^2 + \mathbf{k}^2} \quad (4.60)$$

と表すことができる。このとき、 $\int d^3k$ 積分を、大きさ $k = |\mathbf{k}|$ に関する積分と角度積分に分け、角度積分を実行してから整理すると、次の結果が得られる。

$$\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) = \frac{q_1}{4\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_1|} \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k(e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{R}_1|} - e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{R}_1|})}{m^2 + k^2} \quad (4.61)$$

式 (4.61) で残っている $\int_{-\infty}^{\infty} dk$ 積分は、留数定理を用いて実行することができ結果として $\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1)$ は次式のように与えられることがわかる：

$$\phi_{\text{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_1) = \frac{q_1}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{R}_1|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_1|} \quad (4.62)$$

- (3) ここまでの結果を用いると、ポアソン方程式の代わりに式 (4.59) を用いると、位置 \mathbf{R}_i ($i = 1, 2$) にそれぞれ電荷 q_i ($i = 1, 2$) の粒子を置いたときの $V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)$ は

$$V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = q_2 \phi_{\text{sol}}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|}}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|} \quad (4.63)$$

と求まり、この結果は湯川ポテンシャルと呼ばれるものになっていることが確認できる。また、 $m \rightarrow 0$ としたときには

$$\lim_{m \rightarrow 0} V(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|} \quad (4.64)$$

となり、クーロンポテンシャルを再現することも確認できる。

[複素解析] 演習問題 4 (2023 年 12 月 18 日 (月) 出題, 2023 年 12 月 24 日 (日) 17 時提出締め切り)

問 1 以下の関数について, 特異点の位置をすべて求め, その位置を複素平面上に図示せよ. また, それぞれの特異点に対応する留数を求めよ. ただし, 定数 ϵ, m, γ, T はすべて正の定数とする. また, (2) では $\epsilon/m^2 \ll 1$ を満たすものとし, ϵ に関して 1 次の展開の範囲で結果を求めよ.

$$(1) \frac{1}{z^2 + m^2} \quad (2) \frac{1}{z^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3) \frac{1}{z^2 - m^2 + i\gamma z} \quad (4) \frac{1}{e^{\frac{z}{T}} + 1}$$

問 2 前問の結果と留数定理を用いて, 以下の定積分を実行せよ. ただし, (4) では $t > 0$ と $t < 0$ で場合分けをして, それぞれの場合について, 付け足した積分経路からの寄与が指数関数的に小さくなって無視できるかに気をつけること.

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 + m^2}$$

$$(2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\gamma\omega}$$

$$(4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - m^2 + i\gamma\omega}$$

問 3 講義での説明を参考にして, フレネル積分に関する次の公式を示せ:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\frac{ia}{2}t^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{-ia}} \quad \text{with } a > 0 \quad (4.65)$$

ただし, 講義で扱った場合とは指数の符号が異なることに注意して, 導出過程をちゃんと説明すること.

解答例.

問 1 考えている関数を $f(z)$ と呼ぶ. 特異点の位置は分母がゼロになる点を求めればよく, 留数はローラン展開の -1 次の係数を見ればよい.

(1) $0 = z^2 + m^2$ を解くと, $z = \pm im$ に 2 つの特異点があることがわかり, どれも 1 位の極になっていることがわかる. 特異点の位置を図示したものが図 19 にある. また, 留数はそれぞれ次のとおり:

$$\text{Res}_{z=+im} f(z) = \lim_{z \rightarrow +im} (z - im)f(z) = -\frac{i}{2m}, \quad \text{Res}_{z=-im} f(z) = \lim_{z \rightarrow -im} (z + im)f(z) = \frac{i}{2m}$$

(2) $z^2 - m^2 + i\epsilon = 0$ を解くと, $z = \pm\sqrt{m^2 - i\epsilon}$ に 1 位の極を持つことがわかる. $m > 0$ で, $\epsilon/m^2 \ll 1$ を用いると, $z \simeq m - i\epsilon, -m + i\epsilon$ と表される [ϵ は無限小と考え, $\epsilon/(2m)$ を新たに ϵ と呼ぶことにした]. 特異点の位置を図示したものは図 19 にある. また, 留数はそれぞれ

$$\text{Res}_{z=m-i\epsilon} f(z) = \frac{1}{2m - i\epsilon}, \quad \text{Res}_{z=-m+i\epsilon} f(z) = -\frac{1}{2m - i\epsilon} \quad (4.66)$$

(3) 2 次方程式の解の公式を用いて $z^2 - m^2 + i\gamma z = 0$ を解くと $z = z_{\pm} := \frac{-i\gamma \pm \sqrt{4m^2 - \gamma^2}}{2}$ に極を持つことがわかる. このとき, 特異点の位置と種類は, ルートの中に現れる $4m^2 - \gamma^2$ の符号によって少し異なることに注意が必要である. 場合分けして扱おうと, 以下のとおり (特異点の位置は図 19):

(a) $4m^2 - \gamma^2 > 0$ のとき: 特異点は 1 位の極で, その位置は実部が $\pm \frac{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}}{2}$, 虚部が $-\frac{\gamma}{2} (< 0)$ である. このとき, 留数は次式で与えられる:

$$\text{Res}_{z=z_+} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_+} (z - z_+)f(z) = \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{1}{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}}$$

$$\text{Res}_{z=z_-} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_-} (z - z_-)f(z) = \frac{1}{z_- - z_+} = -\frac{1}{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}} \quad (4.67)$$

- (b) $4m^2 - \gamma^2 = 0$ のとき：2 次方程式の解は $z = -\frac{i\gamma}{2}$ に縮退している．このとき，考えている関数は $f(z) = \frac{1}{(z + \frac{i\gamma}{2})^2}$ となるため，特異点は 2 位の極で，その位置は $z = -\frac{i\gamma}{2}$ ．このとき， $f(z)$ の $z = -\frac{i\gamma}{2}$ まわりのローラン展開は

$$f(z) = \frac{1}{(z - \frac{i\gamma}{2})^2} \quad (4.68)$$

なので， $\frac{1}{z - \frac{i\gamma}{2}}$ の係数はゼロである．つまり， $z = -\frac{i\gamma}{2}$ における留数は 0.

- (c) $4m^2 - \gamma^2 < 0$ のとき：特異点は 1 位の極．このとき， $\pm\sqrt{4m^2 - \gamma^2} = \pm i\sqrt{\gamma^2 - 4m^2}$ と表されることを使うと，その位置は $z = z_{\pm} := \frac{-i\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - 4m^2}}{2}$ ．ここで， $\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4m^2} > 0$ なので，特異点はどちらも虚軸上の負の位置にある．また，留数はそれぞれ以下のように求まる：

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_+} (z - z_+)f(z) = \frac{1}{z_+ - z_-} = -\frac{i}{\sqrt{\gamma^2 - 4m^2}} \\ \text{Res } f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_-} (z - z_-)f(z) = \frac{1}{z_- - z_+} = \frac{i}{\sqrt{\gamma^2 - 4m^2}} \end{aligned} \quad (4.69)$$

- (4) $e^{z/T} + 1 = 0$ を解くと $z = (2n + 1)i\pi T$ ($n \in \mathbb{Z}$) に特異点を持つことがわかる (図 19)．また，指数関数の周期性に注目すると，どの特異点も $z = i\pi T$ の特異点と同じものを与えることがわかる．そこで， $z = i\pi T$ でローラン展開を行うと，

$$f(z) = \frac{1}{e^{z/T} + 1} = -\frac{T}{z - i\pi T} + \frac{1}{2} + O(z - i\pi T) \quad (4.70)$$

と求まる．したがって，主要部は $-\frac{T}{z - i\pi T}$ であることから，すべての特異点は 1 位の極で，かつその留数は $-T$ であることがわかる．

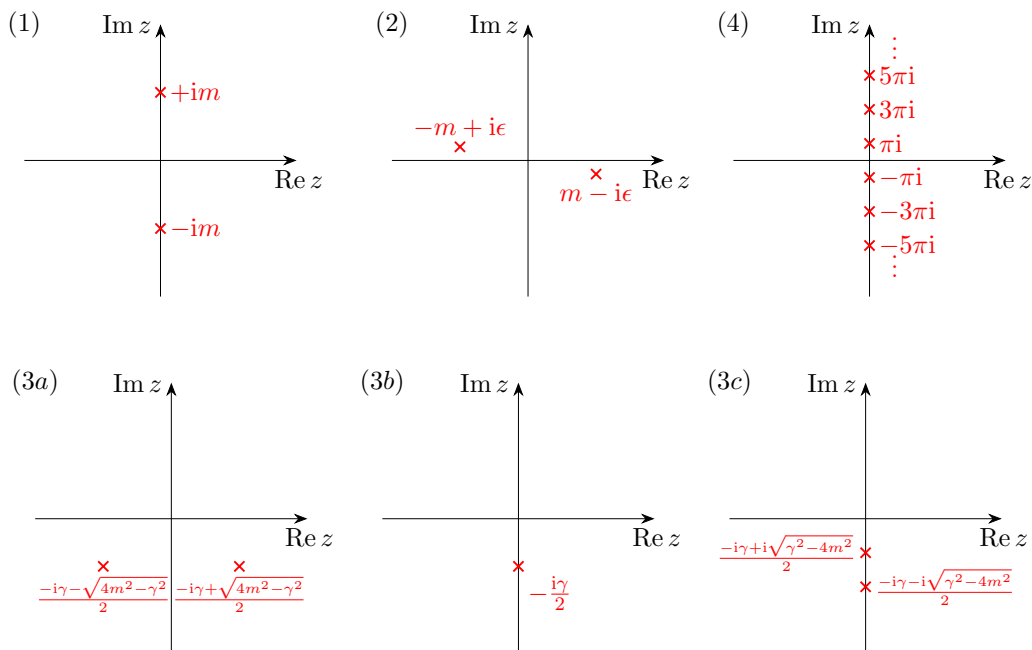


図 19. 特異点の位置.

問 2 求めたい積分をそれぞれ I と置き，前問の結果を参考に留数定理を使って積分を評価すればよい.

- (1) ω を複素数 z まで拡張してみると，被積分関数は問 1 で定めた特異点と留数を持つ．また，被積分関数は $z^2 + m^2$ を分母に持つため，講義で扱った例と同様にして上半平面を囲む積分経路を考

えると、上半平面の無限に大きな半円上を走る経路からの積分への寄与はゼロになると評価できる。したがって、上半平面を囲む積分経路について留数定理を用いれば、次のように求まる：

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} f(z) = -\frac{i}{2m} \quad (4.71)$$

- (2) 前問と同様にして、上半平面を囲むように半径が無限大の積分経路を付け足しても、余分な経路の寄与は半径無限大でゼロになり、積分結果は変わらない。そこで、上半平面を囲む経路について留数定理を適用すると、次のように評価できる：

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Res}_{z=-m+i\epsilon} f(z) = -\frac{1}{2m} \quad (4.72)$$

- (3) 図 19 で求めたように、特異点はすべて下半平面にある。したがって、前問と同様にして、上半平面を囲む経路を追加して留数定理を適用すると、次のように評価できる：

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = 0 \quad (4.73)$$

- (4) 前問と同様にして扱いたいのが、大きな半径野極限で指数関数部分がゼロとなる経路しか付け加えられないことに注意が必要である。指数部分を分解すると $-izt = (\operatorname{Im} z)t - i(\operatorname{Re} z)t$ となることから、指数が小さくなるのは、 $t > 0$ のときは $\operatorname{Im} z < 0$ 、 $t < 0$ のときは $\operatorname{Im} z > 0$ である。したがって、 $t < 0$ のときを考えると、上半平面を囲む積分経路を付け加えることができるが、このときは留数を囲まないで積分結果はゼロになる。一方、 $t > 0$ のときは、下半平面を囲む経路を付け加えて留数定理を適用することで、積分が実行できる。簡単のため、 $4m^2 - \gamma^2 > 0$ のときを考えると、問 2 の結果も用いて

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \sum_{z=z_+, z_-} \operatorname{Res}_z \frac{e^{-izt}}{z^2 - m^2 + i\gamma z} = \frac{e^{-iz_+t}}{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}} - \frac{e^{-iz_-t}}{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}} \left[e^{-\frac{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}}{2}it} - e^{+\frac{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}}{2}it} \right] \end{aligned} \quad (4.74)$$

が得られる。また、 $4m^2 - \gamma^2 < 0$ のときも同じ結果が得られる。一方、 $4m^2 - \gamma^2 = 0$ のときは $f(z) = \frac{e^{-izt}}{(z + \frac{i\gamma}{2})^2}$ の $z = -\frac{i\gamma}{2}$ における留数を求める必要がある。指数関数の部分をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{-izt}}{(z + \frac{i\gamma}{2})^2} = \frac{1}{(z + \frac{i\gamma}{2})^2} \left[e^{-\frac{\gamma}{2}t} - ite^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(z + \frac{i\gamma}{2} \right) + \dots \right] \\ &= \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{(z + \frac{i\gamma}{2})^2} - \frac{ite^{-\frac{\gamma}{2}t}}{z + \frac{i\gamma}{2}} + \dots \end{aligned} \quad (4.75)$$

となることから、その留数は $-ite^{-\frac{\gamma}{2}t}$ と求まる。よって、 $4m^2 - \gamma^2 = 0$ のとき、 $t > 0$ の積分結果は

$$I = \operatorname{Res}_{z=-\frac{i\gamma}{2}} \frac{e^{-izt}}{(z + \frac{i\gamma}{2})^2} = -ite^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (4.76)$$

以上の結果をヘヴィサイドのステップ関数 $\theta(t)$ を用いて表すと、以下のとおり：

- $4m^2 - \gamma^2 \neq 0$ のとき： $I = \theta(t) \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}} \left[e^{-\frac{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}}{2}it} - e^{+\frac{\sqrt{4m^2 - \gamma^2}}{2}it} \right]$ (4.77)
- $4m^2 - \gamma^2 = 0$ のとき： $I = -i\theta(t)te^{-\frac{\gamma}{2}t}$

ちなみに、ここで求めた関数形は〈速度抵抗があるときの調和振動子〉で出てくるものになっている(実際、 $4m^2 - \gamma^2$ の正負によって、減衰振動、臨界減衰、過減衰を記述する解が得られている)。これは、この設問で求めていたのが、速度抵抗があるときの調和振動子に関する遅延グリーン関数であったからである。

問 3 複素関数 $f(z) = e^{\frac{ia}{2}z^2}$ の積分を考えてみる. $f(z)$ は複素平面全体で正則なので, コーシーの積分定理から閉じた経路に関する複素積分はゼロとなる. そこで, 図 20 に示した

$$C_R = \begin{cases} C_1 : z = t & \text{with } -R \leq t \leq R \\ C_2 : z = Re^{it} & \text{with } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ C_3 : z = -te^{\frac{i}{4}\pi} & \text{with } -R \leq t \leq R \\ C_4 : z = Re^{-it} & \text{with } \frac{3}{4}\pi \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (4.78)$$

という閉じた経路を考えよう. このとき, コーシーの積分定理 (あるいは留数定理) から

$$0 = \oint_C dzf(z) = \int_{C_1} dzf(z) + \int_{C_2} dzf(z) + \int_{C_3} dzf(z) + \int_{C_4} dzf(z) \quad (4.79)$$

となるが, C_2 と C_4 上の積分は $R \rightarrow \infty$ の極限で指数的に小さくなりゼロになる. 一方, C_1 と C_3 上の積分はそれぞれ

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} dzf(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\frac{ia}{2}t^2} = I \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} dzf(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt (-e^{\frac{i}{4}\pi}) e^{\frac{ia}{2}t^2 e^{\frac{i}{2}\pi}} = -e^{\frac{i}{4}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{a}{2}t^2} = -\sqrt{\frac{2\pi}{e^{-\frac{i}{2}\pi}a}} \end{aligned} \quad (4.80)$$

となる. 以上から, コーシーの積分定理から得られた結果で $R \rightarrow \infty$ とすると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\frac{ia}{2}t^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{-ia}} \quad \text{with } a > 0 \quad (4.81)$$

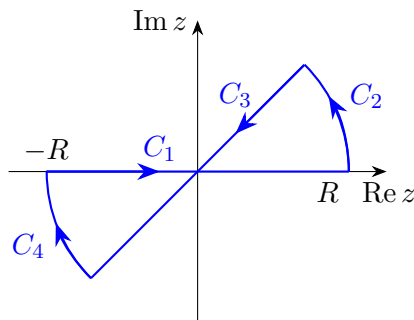


図 20. 積分経路 C_R .

5 複素関数の級数展開と無限和

◇ ローラン展開

既に議論に現れたように、これまで実関数と複素関数の展開として

$$\begin{aligned}
 &\bullet \text{テイラー展開: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\
 &\bullet \text{ローラン展開: } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \cdots + a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

というものを考えてきた。ローラン展開はテイラー展開を負のべきまで許す形に拡張したものだが、まずはローラン展開に関する主張をまとめておこう。

定理. 〈ローラン展開〉 複素関数 $f(z)$ が $0 < |z| < R$ で正則とする。このとき、 $f(z)$ は $r_1 \leq |z| \leq r_2$ ($0 < r_1 < r_2 < R$) で一様収束する級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (0 < |z| < R) \tag{5.2}$$

に展開できる。このとき、係数 a_n は一意に定まり、

$$a_n = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) z^{-n-1} \tag{5.3}$$

で与えられる。この展開を関数 $f(z)$ の〈ローラン展開〉と呼ぶ。

証明 (係数の一意性のみ) ここでは係数の一意性のみを示しておく。ローラン展開ができたすると、その両辺に z^{-m-1} ($m \in \mathbb{Z}$) を掛けて $|z| = r$ ($0 < r < R$) の円周上で積分すると、一様収束することから項別に積分が実行でき

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) z^{-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n-m-1} = a_m \tag{5.4}$$

が得られる。つまり、 a_m が $f(z)$ から一意に定まる。

ローラン展開を実行することで、前の節で扱った主要部と留数を求めることができる。

例. 複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ について、 $z = i$ におけるローラン展開を考えてみよう。これは分母が因数分解できることに注目すると、次のように展開することができる：

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - \frac{i}{2}(z-i)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} \left[1 + \frac{i}{2}(z-i) + \cdots \right] \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2i} \frac{1}{z-i}}_{\text{主要部}} + \frac{1}{4} + \cdots
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

したがって、複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ の $z = i$ における主要部と留数が以下のように求まった：

$$\text{主要部: } \frac{1}{2i(z-i)}, \quad \text{留数: } \frac{1}{2i} \tag{5.6}$$

◇ 複素関数の展開：べき級数展開と収束半径

さて、これまで何気なく $\sin z$ や e^z , $\text{Log } z$ などの関数を考えてきた。複素数 z に対するこれらの関数は正則関数の例を議論したときに、たとえば

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y) \tag{5.7}$$

として定義していた。この定義の右辺は実関数 (の和) のみで与えられているので、確かに計算できるものになっている。しかし、複素数の関数である e^z を実関数を用いて定義するのは、(わかりやすくはあるが) 概念的には少し微妙なようにも感じられる。そこで、ここでは〈複素関数の級数展開〉に基づいて、複素関数を定義する方法を考えてみたい。

まず、ローラン展開に入る前に、テイラー展開の範囲で考えてみよう。テイラー展開として考えてきたものは、一般に〈形式べき級数〉

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad (5.8)$$

の「特別なもの」になっていることに注目する。「特別なもの」というのは、「形式的な展開にちゃんとした意味を持たせることができる」ということであり、収束性に関するよい性質が成立することから従う帰結である。そこで、「よい収束性」を持つときは、展開式 (5.8) を用いて、複素関数を定義することができそうである。そこでまず、べき級数展開の収束性について考えてみよう。

さて、式 (5.8) に与えられた展開は $z=0$ では $f(z=0) = a_0$ となり自明に収束しているが、 $z \neq 0$ としたときにはどこまで収束するかを考えてみる。このとき、以下のいずれかが成立する²：

定理. 〈べき級数と収束半径〉 べき級数 (5.8) について、収束半径 R と呼ばれる量が定義され、以下のいずれかが成立する：

- (i) ある有限な $R > 0$ があり、 $|z| < R$ において絶対収束、かつ $|z| > R$ において発散。
- (ii) $R = \infty$ となり、すべての z に対して絶対収束。
- (iii) $R = 0$ となり、0 以外のすべての z に対して発散。

(i) と (ii) は収束性に関して (iii) の場合と比べてよい性質を持っているが、(iii) の展開も応用上重要である。ちなみに、収束半径 $R = 0$ となる (iii) の展開のことを、〈漸近展開 (asymptotic expansion)〉と呼ぶ。

以上の結果を認めると、次に気になるのは収束半径 R の求め方である。収束半径の求め方については、次の2つの方法が知られている：

命題. 〈収束半径の求め方〉 べき級数 (5.8) について、その収束半径 R を次のように求めることができる：

- (i) 展開係数 a_n の比の極限が存在するとき、次式で与えられるようにそれは収束半径 R に等しい：

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (5.10)$$
- (ii) 実数列 $\{c_n\}$ の上極限 $c = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n$ を、その収束部分列の極限値のうちの最大値とする。このとき、収束半径は次式で与えられる：

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \quad (5.11)$$

それぞれ簡単な関数の具体例を用いて (i)-(iii) の例を以下で考えてみよう：

²絶対収束は以下で定義：

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty \text{ を満たすとき、級数 } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \text{ は絶対収束すると定義する。} \quad (5.9)$$

例. 複素変数 z の指数関数 e^z と三角関数 $\cos z$, $\sin z$ を次式で定義する：

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{aligned} \quad (5.12)$$

このとき、係数比の極限を考えると、たとえば指数関数 e^z の収束半径は

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty \quad (5.13)$$

となるので、収束半径 $R = \infty$ である。三角関数も同様である。

例. 対数関数 \log を

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots \quad (5.14)$$

という展開により定義する。このとき、展開係数から、その収束半径は以下のように定まる：

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad (5.15)$$

また、有理関数 $\frac{1}{1-z}$ を考えると、展開式

$$\frac{1}{1-z} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad (5.16)$$

からその収束半径もまた $R = 1$ と求まる。

例. 次の積分を考える^a：

$$Z(g^2, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2}x^2 - \frac{g^2}{4}x^4} \quad (\beta > 0, g \geq 0) \quad (5.17)$$

この積分は $g^2 = 0$ のときはガウス積分なので、ただちに実行でき

$$Z(g^2 = 0, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2}x^2} = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} = 1 \quad (5.18)$$

$g^2 \neq 0$ のときは少しむずかしいが、その結果は第2種修正ベッセル関数 $K_n(z)$ と呼ばれる特殊な関数を用いて次式で与えられる：

$$Z(g^2, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\beta}{g} e^{\frac{\beta^2}{8g^2}} K_{\frac{1}{4}}(\beta^2/8g^2) \quad (5.19)$$

しかし、このような関数を (計算機や数学公式集を参照せずに) 見つけることは至難の技である。

近似的にでもよいから積分結果を求めるためには、どうすればよいか。このとき、 $g^2 = 0$ のときの計算が厳密に実行できることに注目しよう。そこで、 $g^2 \ll 1$ のときを考え、上の積分を g^2 について展開すると、展開の各項は積分が実行可能であることに気づく。したがって、展開項をそれぞれ個別に項

別積分することが可能だとすると

$$\begin{aligned}
 Z(g^2, \beta) &= \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2}x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g^2}{4}x^4\right)^n \\
 &= \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \left(-\frac{g^2}{4}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2}x^2} x^{4n} \\
 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+2+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+2)} \left(-\frac{1}{\beta^2}\right)^{n+1} (g^2)^{n+1}
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

が得られる。ただし、ここでガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}\beta^{-\frac{1}{2}} \tag{5.21}$$

を β に関して複数回微分して得られる公式を用いて、項別に積分を実行し、最終行では積分結果を **ガンマ関数** と呼ばれる関数 $\Gamma(z)$ を使って表した。これは次回の講義で説明するように、だいたい $\Gamma(n+1) = n!$ だと思ってよいので、展開係数は n が大きいときに $a_n \sim n!$ のようにふるまうことがわかる。したがって、収束半径は

$$R \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0 \tag{5.22}$$

と求まる。つまり、 $Z(g^2, \beta)$ を g^2 について展開した形式べき級数は収束が半径がゼロの **漸近展開** になっていることがわかる。

^a物理では、**統計力学** という「熱力学的性質をミクロなモデルに基づいて記述する分野」でこのような積分に出くわす。より具体的には、変位 x の 4 次比例するポテンシャルエネルギーをもつ非調和振動子を温度 T の熱浴に接触させ熱平衡状態になったとき、非調和振動子の **ヘルムホルツの自由エネルギー** を求める際に、この積分 (の係数を調節したもの) が出てくる。

(第 12 回ここまで, 2024/01/16)

◇ 解析接続

前節の解析から、ある点を中心とした収束円の範囲内を定義域とすると、級数展開に基づいて複素関数の定義を与えられそうなのがわかった。このように定義した複素関数はよい性質を持つのか (たとえば、一意性を持つのか)、あるいは定義域の範囲を広げることができないかを考えてみたい。

さて、ローラン展開ですでに扱ったように、複素関数のべき級数展開の展開点はどこにとってもよい。そこで、次の例を考えてみよう：

例. 上の例で見たように、 $z = 0$ において

$$\frac{1}{1-z} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \tag{5.23}$$

という展開を行った解き、その収束半径は 1 であった。そこで、収束が保証されている $z = c$ ($|z| < 1$) という新しい点で展開をやりなおしてみよう。結果は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-c) - (z-c)} = \frac{1}{1-c} \frac{1}{1 - \frac{z-c}{1-c}} \\
 &= \frac{1}{1-c} \left[1 + \frac{z-c}{1-c} + \frac{(z-c)^2}{(1-c)^2} + \frac{(z-c)^3}{(1-c)^3} + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

となるが、この展開の収束半径は $R = |1-c|$ となる。たとえば、 $c = -\frac{1}{2}$ とすると、点 $z = -\frac{1}{2}$ まわりでの展開が、収束半径 $R = \frac{3}{2}$ の展開になっていることがわかる。これは、もとの収束半径で記述される

領域よりも広い領域での収束性を保証している。したがって、複素関数 $\frac{1}{1-z}$ をべき級数展開による定義が、もとの収束円より広い領域で可能だとわかる。

以上の例をみると、「ある領域で収束べき級数によって定義されたなんらかの複素関数」を、もとの収束半径を超えた領域まで定義を広げられる可能性を示唆している。そこで、ある領域で定義された関数の定義域を複素平面上で拡張していくことを考えたい。ただし、どんな複素関数でも定義を拡張できるかは微妙であろう想像される。そこで、収束べき級数展開を持つ場合はよい性質を持つことを期待し、まずは次の用語を定義する：

定義. 〈解析関数〉領域 D 上で定義された関数 $f(z)$ が、 D に含まれる各点の近傍で収束べき級数に展開できるとき、 $f(z)$ のことを〈解析関数 (analytic function)〉であるとか〈解析的 (analytic)〉であるという。

複素関数については、正則関数と解析関数は等価なものと考えてよいが、解析関数の方は実関数についても定義できている概念であることに注意する。さて、この準備に基づいて解析関数の定義を拡張することを目指し、次を定義しよう：

定義. 〈解析接続〉複素平面上の領域 D_1 で定義された正則関数 $f_1(z)$ が、(D_1 を含む) より広い領域 D_2 で定義された正則関数 $f_2(z)$ に拡張でき

$$f_1(z) = f_2(z) \quad z \in D_1, \quad D_1 \subset D_2 \quad (5.25)$$

が成立するとする。このとき、 $f_2(z)$ は $f_1(z)$ の D_2 への解析接続 (analytic continuation) であるという。

このとき、解析接続はどのような条件のもとで実行でき、どの程度意味を持つかを追求すると、以下の定理が成立することを示すことができる：

定理. 〈一致の定理〉複素関数 $f(z)$ と $g(z)$ が領域 D で正則だとする。このとき、点 $a \in D$ に収束するある点列 $z_n \rightarrow a$ ($z_n \neq a, z_n \in D$) の上で $f(z)$ と $g(z)$ の値が

$$f(z_n) = g(z_n) \quad \text{with } n = 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

と一致しているとする、 D 上のすべての点で $f(z) = g(z)$ が成立する。

この定理は、領域 D での解析接続が存在するときには、収束する点列上で一致するという条件だけから領域 D 上の全体で複素関数が一意に決まってしまうことを意味する。したがって、なんらかの方法 (級数展開や関数関係式など) で定義した複素関数が一意に意味を持つという、非常に強力な結果を与えている。

また、特別な場合として $f(z) = g(z)$ が、複素平面上の領域 D の中にある点の近傍や (実軸上の区間のような) 線分上で成立しているとしよう。このとき、一致の定理により、 D 全体で $f(z) = g(z)$ が成立することを主張している。このことにより、一致の定理は〈一意性を保ちながら (正則関数としての) 複素関数の定義域を広げられること〉を保証してくれる。

一致の定理の帰結として、たとえば、複素関数の定義について、以下の結果が得られる。

例. 講義の前半で、正則関数の例として $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ と指数関数を定義した。一方で、この節で扱ったように指数関数は複素関数の収束べき級数展開として

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (5.27)$$

とも表されたが、収束半径が ∞ であることを考えると、複素関数としてはこのべき級数展開を逆に定義にした方が自然なようにも思われてくる。このように、実関数としての e^x を複素平面上まで拡張することを目的として、別個の方法で定義できてしまうと、問題が生じかねない。しかし、一致の定理は、実際にどのようにして e^x の定義を拡張するかとは無関係に、正則関数としての拡張が一意であることを主張している。

例. これまで、指数関数 e^z は、複素関数としても指数法則

$$e^z e^w = e^{z+w} \quad (5.28)$$

を満たすことを当然のように使ってきた。しかし、 $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ と定義するのでも、べき展開で定義するにしても、これは証明をしておかねばならない事実である。しかし、一致の定理を用いればこれは直ちに示すことができる。実際、指数法則の両辺は $w \in \mathbb{R}$ を固定すると、どちらも複素平面上で定義された正則関数で、 z を実軸上に制限すると成立することが知られている。したがって、一致の定理により一般に $z \in \mathbb{C}$ でも成立することがわかる。さらに、 $z \in \mathbb{C}$ を固定して、 w の関数として見て同様の議論を繰り返すと、結局は一般の複素数 z, w について、指数法則が成立することが示される。

以上の2つ目の例のよう一致の定理を用いていくことで、一般に以下の結果を示すことができる：

定理. 〈関数関係不変の原理〉 領域 D 上で定義された正則関数 $f(z), g(z), \dots$ の間に

$$F[f, g, \dots] = 0 \quad (5.29)$$

という関係式が、ある点の近傍や (実軸の区間などの) 線分上で成立していたとする。このとき、同じ関係式が領域 D 全体で成立する。

したがって、実関数を正則関数として複素関数上に解析接続できたとき、実関数のときに成立していた関係式はすべて複素関数としても成立することがわかる。

[複素解析] 演習問題 5 (2024 年 1 月 22 日 (月) 出題, 2023 年 1 月 28 日 (日) 17 時提出締め切り)

問 1 以下の関数について, 指定された z 近傍で z の 0 次項までのローラン展開を行い, 主要部と留数を求めよ. ただし, m, T はそれぞれ正の定数とする.

$$(1) \frac{1}{z^2 + m^2} \quad (z = im) \quad (2) \frac{1}{(z^2 + m^2)^2} \quad (z = im) \quad (3) \frac{1}{e^{\frac{z}{T}} + 1} \quad (z = \pi iT)$$

問 2 以下の級数について, 収束半径を求めよ.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} z^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1} n!} z^n \quad (3) \frac{1}{2-z} \text{ の } z=1 \text{ まわりの級数展開}$$

問 3 三角関数 $\tanh z$ の逆関数 $\operatorname{arctanh} z$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 変数変換を用いて不定積分 $\int dz \frac{1}{1-z^2}$ を計算することで, 以下の公式を示せ.

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{arctanh} z) = \frac{1}{1-z^2}$$

(2) 前問で求めた公式の右辺を $z=0$ まわりで展開した結果を求めよ.

(3) 前問までの結果を利用して, $\operatorname{arctanh} z$ の $z=0$ まわりの級数展開を求めよ. また, その結果に基づいて $\operatorname{arctanh} z$ の $z=0$ まわりの級数展開について, その収束半径を求めよ.

解答例.

問 1 因数分解・部分分数分解などを用いて直接展開していくと, 以下の通り:

(1) 分母を因数分解してから展開をすると, ローラン展開の結果と主要部は

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 + m^2} &= \frac{1}{z - im} \cdot \frac{1}{z + im} = \frac{1}{z - im} \cdot \frac{1}{(z - im) + 2im} = \frac{1}{z - im} \cdot \frac{1}{2im} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - im}{2im}} \\ &= \frac{1}{2im} \frac{1}{z - im} \left[1 - \frac{1}{2im}(z - im) + \dots \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2im} \frac{1}{z - im}}_{\text{主要部}} + \frac{1}{4m^2} + \dots \end{aligned}$$

と求まる. したがって, $z = im$ における留数は $\frac{1}{2im}$ とわかる.

(2) 分母が $(z^2 + m^2)^2 = (z + im)^2(z - im)^2$ と因数分解できることを用いると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 + m^2)^2} &= \frac{1}{(z - im)^2} \cdot \frac{1}{(z + im)^2} = \frac{1}{(z - im)^2} \cdot \frac{-1}{4m^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z - im}{2im}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{(z - im)^2} \left[1 - \frac{z - im}{2im} - \frac{(z - im)^2}{(2m)^2} + \dots \right]^2 \\ &= -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{(z - im)^2} \left[1 - \frac{1}{im}(z - im) - \frac{3}{4m^2}(z - im)^2 + \dots \right] \\ &= \underbrace{-\frac{1}{4m^2} \frac{1}{(z - im)^2} + \frac{1}{4im^3} \frac{1}{z - im} + \frac{3}{16m^4}}_{\text{主要部}} + \dots \end{aligned}$$

よって, $z = im$ において 2 位の極を持ち, 留数は $\frac{1}{4im^3}$ と求まる.

(3) $z = \pi iT$ の近傍で

$$e^{\frac{z}{T}} = e^{\frac{z-\pi iT}{T}} e^{\pi i} = -1 - \frac{z-\pi iT}{T} - \frac{1}{2} \frac{(z-\pi iT)^2}{T^2} + \dots \quad (5.30)$$

と展開できることを用いて展開すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{\frac{z}{T}} + 1} &= \frac{1}{-1 - \frac{z-\pi iT}{T} - \frac{1}{2} \frac{(z-\pi iT)^2}{T^2} + \dots} = -\frac{T}{z-\pi iT} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{z-\pi iT}{T} + \dots} \\ &= -\frac{T}{z-\pi iT} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{z-\pi iT}{T} + \dots \right] = \underbrace{-\frac{T}{z-\pi iT}}_{\text{主要部}} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned} \quad (5.31)$$

と求まる. よって, $z = \pi iT$ で 1 位の極を持ち, その留数は $-T$ と求まる.

問 2 展開係数が a_n のべき級数の収束半径は $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ として求められるので, 以下のように計算できる:

(1) $a_n = n!/2^n$ なので, 収束半径は $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!/2^n}{(n+1)!/2^{n+1}} = \frac{2}{n+1} = 0$ と求まる.

(2) $a_n = \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}n!}$ なので, 収束半径は以下のように求まる:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+3}(n+1)!}{3^{2n+1}n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^2(n+1) = \infty \quad (5.32)$$

(3) $\frac{1}{2-z}$ について, $z = 1$ まわりでの展開を求めると

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)} = 1 + (z-1) + (z-1)^2 + (z-1)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \quad (5.33)$$

と求まる. よって, 展開係数が $a_n = 1$ から, 収束半径は $R = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ と求まる.

問 3 (1) $z = \tanh \theta$ と変数変換すると,

$$1 - z^2 = 1 - \tanh^2 \theta = \frac{1}{\cosh^2 \theta}, \quad \frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{\cosh^2 \theta} \quad (5.34)$$

が成立するので,

$$\int dz \frac{1}{1-z^2} = \int d\theta \frac{1}{\cosh^2 \theta} \cdot \cosh^2 \theta = \int d\theta = \theta + \text{const.} = \text{arctanh } z + \text{const.} \quad (5.35)$$

この式は, $\text{arctanh } z$ が $\frac{1}{1-z^2}$ の原始関数になっていることを意味しているが, これを言い換えると示したい式に他ならないことがわかる.

(2) テイラー展開を行うと以下が得られる:

$$\frac{d}{dz}(\text{arctanh } z) = \frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \quad (5.36)$$

(3) 前問の結果について, 両辺を $z = 0$ から z まで積分した結果から, $\text{arctan } z$ の $z = 0$ 近傍での展開が以下のように求まる.

$$\text{arctanh } z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1} \quad (5.37)$$

よって, 展開係数の比の極限から, 収束半径は $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$ とわかる.

6 複素関数論の応用

これまでに学んだ複素関数論の知識を用いて、物理を学習する際に現れる関数や計算法について、いくつかの応用例を紹介する。

◇ ガンマ関数とベータ関数

数学でも物理でもよく出てくる量として〈階乗 (factorial)〉

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{with } n \in \mathbb{N} \quad (6.1)$$

がある (\mathbb{N} は自然数全体を表す集合). これは自然数 $n \in \mathbb{N}$ のみに対して値が定義された関数とみることができ、これを複素変数 $z \in \mathbb{C}$ に拡張した複素関数 $\Gamma(z)$ を考えたい. このような関数 $\Gamma(z)$ を〈ガンマ関数〉と呼ぶ (Γ は「ガンマ」と読む文字のギリシャ文字の大文字).

さて、階乗を規定する最も大事な性質は

$$(i) \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad (ii) \quad 1! = 1 \quad (6.2)$$

の2つであるので、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は、これらに対応して

$$(i) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\operatorname{Re} z > 0) \quad (ii) \quad \Gamma(1) = 1 \quad (6.3)$$

の2つの条件を満たしてほしい.

(第13回ここまで, 2024/01/22)

唐突かつ天下りではあるが、実はこのような性質を満たすガンマ関数を、 $\operatorname{Re} z > 0$ の領域では次の積分により構成できる:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad \text{with } z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (6.4)$$

実際、上に与えた2つの性質は、部分積分などを用いることで

$$(i) \quad \Gamma(z+1) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^z = \underbrace{[-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty}}_{=0 \text{ for } \operatorname{Re} z > 0} - \int_0^\infty dt [-e^{-t} z t^{z-1}] = z \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} = z\Gamma(z) \quad (6.5)$$

$$(ii) \quad \Gamma(z=1) = \int_0^\infty dt e^{-t} = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} = 1$$

と示すことができる. この2つの性質から $z = n \in \mathbb{N}$ となるときには、確かに $\Gamma(n) = n!$ を満たし、階乗と一致することがわかる. ここで、式 (6.4) により、 $\operatorname{Re} z > 0$ を満たす複素数を定義域として複素関数 $\Gamma(z)$ が定義されたことになる.

上の議論でガンマ関数は $\operatorname{Re} z > 0$ において定義されたが、一般の z に関しては上の結果に解析接続を組み合わせることで定義できる. そのために、上で求めた関係式をくりかえし使うことで

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad (6.6)$$

と表せることに注意する. いま、 n は任意に大きくとれるので、この式の右辺の $\operatorname{Re}(z+n+1)$ は常に正に取れる. 正の $\operatorname{Re} z$ のときのガンマ関数は正則であることを用いると、右辺を用いて $\Gamma(z)$ を定義すると、 $\operatorname{Re} z < 0$ の領域におけるガンマ関数の解析接続が定義できたことになる.

さて、ガンマ関数の大事な性質をいくつかまとめておこう.

- **特異点と留数**: 上の定義の仕方から、ガンマ関数は引数が $z = 0, -1, -2, \dots$ という負の整数となる点で1位の極を持つことがわかる. また、特異点 $z = -n$ ($n \in \mathbb{N}$) における、留数は以下のように求まる:

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (6.7)$$

- $\Gamma(1/2)$ の値: ガンマ関数の定義式 (6.4) において, $z > 0$ のときに $t = x^{1/z}$ と変数変換すると, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{z} x^{\frac{1-z}{z}}$ などを用いて

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx \frac{1}{z} x^{\frac{1-z}{z}} e^{-x^{1/z}} x^{\frac{z-1}{z}} = \frac{1}{z} \int_0^\infty dx e^{-x^{1/z}} \quad (6.8)$$

が得られる. したがって, $z = 1/2$ にしたときは, ガウス積分の公式

$$\int_0^\infty dx e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (6.9)$$

を用いて計算することができ, 以下の結果が得られる:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (6.10)$$

これをガンマ関数の性質 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ と合わせると, $\Gamma(n/2)$ ($n \in \mathbb{N}$) はすべて求めることができる.

以上で定義されたガンマ関数の代表的な応用例として, n 次元空間の「球」の性質を調べてみよう.

応用. n 次元の超球の表面積・体積: 半径 R の球について, 2次元球 (つまり円) の面積は πR^2 , 3次元球の体積は $\frac{4\pi}{3} R^3$ であることはよく知られている. では, より高次元空間を考え, 一般の n 次元球 (これを「超球」と呼ぶ) の体積がどうなるかを考えてみよう.

n 次元空間の直交座標系における座標を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と表すと, 半径 R の超球の内部は

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2 \quad (6.11)$$

で指定される. したがって, ヘヴィサイドのステップ関数 $\theta(z)$ を用いて, 超球の体積 V_n は

$$V_n(R) := \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \theta(R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)) \quad (6.12)$$

と定義される.

いま, 超球の体積を考える代わりに, 式 (6.11) の等号で定義される超球面の面積 $S_{n-1}(R)$ を考えてみよう. まず, $S_{n-1}(R)$ は $(n-1)$ 次元の図形の面積なので, 次元解析から R^{n-1} に比例することがわかる. そこで, $S_{n-1}(R) = s_{n-1} R^{n-1}$ (s_{n-1} = 定数) と表すことができる. この上で, 超球の体積を超球をたまねぎの皮のように思って, これをむいて体積を求めると考えると, $S_{n-1}(r)$ を r について積分することで,

$$V_n(R) = \int_0^R dr S_{n-1}(r) = s_{n-1} \int_0^R dr r^{n-1} = \frac{1}{n} s_{n-1} R^n \quad (6.13)$$

と超球の体積 $V_n(R)$ を求めることができる. よって, あとは s_{n-1} さえ求めればよい.

さて, $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2}$ のみの関数 $f(|\mathbf{x}|)$ を n 次元空間で積分することを考えてみる. すると, 被積分関数は \mathbf{x} の長さにしか依存していないため, $|\mathbf{x}| = r$ という半径 r の球面上ではすべて同じ値を与える. このことを考慮すると, 各 r での値に球面の表面積をかけて積分したものが求めたいものを与えるため,

$$\int dx_1 dx_2 \dots dx_n f(|\mathbf{x}|) = \int_0^\infty dr S_{n-1}(r) f(r) = s_{n-1} \int_0^\infty dr r^{n-1} f(r) \quad (6.14)$$

が成立することがわかる. よって, この両辺が評価できるような特別な関数 $f(|\mathbf{x}|)$ があると, s_{n-1} を求めることができ, $S_{n-1}(R)$, ひいては $V_n(R)$ を求めることができる. このような関数として, ちょっと考えると $f(|\mathbf{x}|) = e^{-|\mathbf{x}|^2}$ があることがわかる. 実際, このときには左辺はガウス積分の n 乗として計算でき

$$(\text{左辺}) = \int dx_1 e^{-x_1^2} \int dx_2 e^{-x_2^2} \dots \int dx_n e^{-x_n^2} = \pi^{n/2} \quad (6.15)$$

となる。一方、右辺は $t = r^2$ と変数変換して、ガンマ関数の定義式 (6.4) を思い出すと

$$(\text{右辺}) = s_{n-1} \int_0^\infty dr e^{-r^2} r^{n-1} = s_{n-1} \int_0^\infty dt \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2} s_{n-1} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2} s_{n-1} \Gamma(n/2) \quad (6.16)$$

と表される。よって、片々を比較することで

$$s_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (6.17)$$

が得られる。よって、超球面 $S_{n-1}(R)$ の面積と超球の体積 $V_n(R)$ はそれぞれ以下で与えられることがわかった：

$$S_{n-1}(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} R^{n-1}, \quad V_n(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} R^n \quad (6.18)$$

$n = 2, 3$ の場合について、具体的に求めてみると $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ などを用いて

- $n = 2$ のとき： $S_1(R) = 2\pi R, \quad V_2(R) = \pi R^2$
- $n = 3$ のとき： $S_2(R) = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} R^2 = 4\pi R^2, \quad V_3(R) = \frac{4\pi}{3} R^3$

$$(6.19)$$

が得られる。これは確かに円の円周・面積と球の表面積・体積を再現していることが確認できる。このような超球の体積は、統計物理学などで必要になる。

補足. ベータ関数：ちなみに、ガンマ関数と関連して現れる関数として〈ベータ関数〉と呼ばれる次式で定義される 2 変数複素関数がある^a：

$$B(z, w) := \int_0^\infty dx \frac{x^{w-1}}{(1+x)^{z+w}} = \int_0^1 dt t^{z-1} (1-t)^{w-1} \quad \text{with } \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0 \quad (6.20)$$

2 つ目の積分による表式は $x = (1-t)/t$ と置くと $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ であることを用いれば

$$B(z, w) = \int_1^0 dt \left(-\frac{1}{t^2}\right) \left(\frac{1-t}{t}\right)^{w-1} t^{z+w} = \int_0^1 dt t^{z-1} (1-t)^{w-1} \quad (6.21)$$

と求めることができる。2 つ目の定義式から明らかのように、ベータ関数は $B(z, w) = B(w, z)$ という引数の入れ替えに関する対称性を持つ。ベータ関数はガンマ関数を用いて、次のように表される (証明は略)：

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (6.22)$$

また、この関係式で $z = 1-p, w = p, 0 < \operatorname{Re} p < 1$ と置くと、次の式が得られる：

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad (6.23)$$

^a物理 (とくに場の理論) においても、「スケールを変えたときの見え方の変化」を記述する量としてベータ関数と同じ名前がついたものがあるが、ここで出てきたベータ関数とはまったく関係ない。

◇ 鞍点法 (最急降下法) と漸近展開

べき級数展開と収束半径の議論をした際に、収束半径が0となる〈漸近展開〉と呼ばれるものがあることを説明した。ここでは、漸近展開に関して〈鞍点法 (最急降下法)〉と呼ばれる手法の説明を行う。

例. スターリングの公式：さて、まずはガンマ関数を例にして、 $\Gamma(n+1) = n!$ は n が大きいときにどうふるまうか? という問題について考えることで、〈スターリングの公式〉の導出を行ってみよう。いま、ガンマ関数の積分表示に対して、 $x > 0$ のとき、 $t = xs$ と変数変換して書き直していくと

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^x = \int_0^\infty x ds e^{-xs} (xs)^x = x^{x+1} \int_0^\infty ds e^{x(\log s - s)} \quad (6.24)$$

が得られる。ただし、最右辺では $s^x = e^{\log s^x} = e^{x \log s}$ となることを用いた。

いま、被積分関数の指数に現れた関数 $f(s) = \log s - s$ は $s = 1$ で最大値を取り、 $s = 1$ から離れると単調に減少していく関数である。いま調べたいのは $x \gg 1$ でのふるまいだったので、積分に最も寄与するのは $s = 1$ のまわりの積分だろうとわかる。この点に注目して、次の近似を施してみよう：

- **指数部の展開：**指数に現れた関数 $f(s)$ を最大値を取る $s = 1$ まわりに2次まで展開する：

$$\log s - s \simeq -1 - \frac{1}{2}(s-1)^2 \quad (6.25)$$

- **積分範囲の拡張：**積分範囲の下端を0から $-\infty$ に置き直す。

かなり雑な近似のように見えるが、この2つの近似を施すと、解析的に評価することができ

$$\Gamma(x+1) \simeq x^{x+1} \int_{-\infty}^\infty ds e^{-x - \frac{x}{2}(s-1)^2} = x^{x+1} e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \quad (6.26)$$

よって、 $x = n \gg 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) とすると、〈スターリングの公式〉と呼ばれる階乗に関する次の近似公式が得られた：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \Leftrightarrow \log n! = n \log n - n + O(\log n) \quad (6.27)$$

ガンマ関数とスターリングの公式の結果を比較したものを図 21 にプロットした。かなり雑な近似のように見えたが、 $x > 1$ あたりから非常によく結果を再現していることが確認できる。この公式は統計力学でエントロピーを計算するときなどに使われる。

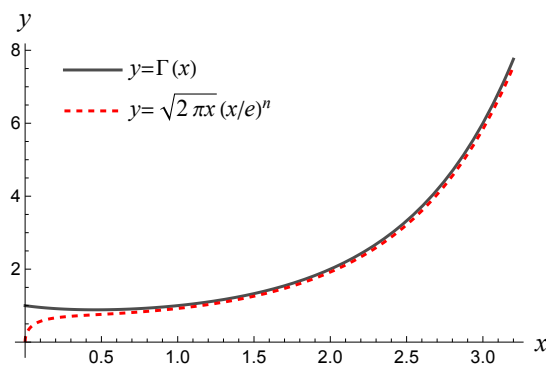


図 21. ガンマ関数の厳密な値とスターリングの公式の比較.

さて、スターリングの公式の導出の際に用いた近似を一般化すると C を複素平面上の経路として

$$Z(N) = \int_C dz e^{Nf(z)} \quad \text{with } N \gg 1 \quad (6.28)$$

という形の積分を評価する〈鞍点法(あるいは最急降下法)〉と呼ばれる近似法が与えられる。これを説明しておこう。まず、スターリングの公式のときと同じく、指数の肩に $N \gg 1$ という大きな数が存在するので、 $f(z)$ が極大値を持つ点まわりで積分に大きな寄与が出ると考えられる。そこで、 $f(z)$ が極値を持つ点 $z = z_*$ のことを〈鞍点〉と呼ぼう。鞍点の条件は

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_*} = 0 \quad (6.29)$$

で与えられる。

さて、スターリングの公式のときは鞍点が積分経路上に現れていたため、簡単に近似法をあたえることができた。しかし、一般には次の点で問題が複雑になりうる：

- 一般に $f(z)$ は虚部も持つため、被積分関数が振動関数になって積分がむずかしい。
- 計算したい積分経路 C 上に $z = z_*$ があるとは限らない。

1つ目の問題はとくに積分を数値的に直接実行しようとする際の障害になる。³

以上の問題を解決した近似方法を与えるためには、もとの積分経路 C が与えられたときに、

$$\text{積分経路 } C \text{ を、鞍点 } z = z_* \text{ を通る虚部が一定の経路 } C_* \text{ に変形する} \quad (6.31)$$

という方法が与えられればよいとわかる。実際、このような経路の変形が実行できたとすると、 $z = z_*$ で $f(z)$ が極大値を取ることから

$$f(z) \simeq f(z_*) - \frac{a}{2}(z - z_*)^2 \quad \text{with } a := -f''(z_*) > 0 \quad (6.32)$$

と展開し、積分範囲を適切に拡張してガウス積分として近似することで

$$Z(N) = \int_{C_*} dz e^{Nf(z)} \simeq e^{Nf(z_*)} \int_{C_*} dz e^{-\frac{Na}{2}(z-z_*)^2} \simeq e^{Nf(z_*)} \sqrt{\frac{2\pi}{Na}} \quad (6.33)$$

つまり、以下のような近似結果が得られる：

$$Z(N) \sim e^{Nf(z_*)} \sqrt{\frac{2\pi}{Na}} = \exp\left(Nf(z_*) + \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{Na}\right) \quad \text{with } a := -f''(z_*) \quad (6.34)$$

$z = z_*$ が鞍点と呼ばれる点になっていること、また積分経路を変形した後の C_* が被積分関数が最も急激に減少するものに対応することから、この近似法のことを〈鞍点法〉とか〈最急降下法〉と呼ぶ。

参考. 一般化された鞍点法の進展：以上の説明からわかるように、鞍点法では(6.31)に与えたことが実行できるかが一番の問題となる。また、上では1つの鞍点だけが積分に寄与する場合を考えたが、一般には複数の鞍点が寄与する場合を考える必要がある。この点に関して、〈レフシェッツ・シンブル法(Lefschetz thimble method)〉と呼ばれる手法を用いると、(1次元積分のような簡単な場合には)具体的な計算を実行できるレベルまで理論的定式化が整備されている。さらに関連して、〈リサージェンス理論〉と呼ばれる漸近展開の理論との関係が調べられ、2010年代の半ば以降に、一般化された鞍点法

³経路積分形式の量子論においては、解析力学で習う作用汎関数 $S[q]$ を重みにして

$$Z = \int \prod_i dq(t_i) e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad (6.30)$$

という多次元積分を実行することで物理量が計算される。したがって、積分(6.28)の多次元版を考えることになり、数値積分を困難にするこの問題がより厄介な形で現れる。この問題は〈符号問題(sign problem)〉と呼ばれ、素粒子物理学・物性物理学のどちらにおいても現れる、計算機物理学のとても重要な未解決問題の1つとして現在も研究が続けられている。興味がある人は最近出た『数理科学 2023年01月号』を見てみたり、江尻さんに質問してみてください。

◇ 正則化：発散する積分を有限にする方法

最後の応用として、場の量子論の計算で頻りに現れる〈**正則化 (regularization)**〉という「発散する積分や無限和を有限にする方法」について紹介する。

場の量子論の摂動計算 (= 小さな数を用いた展開) に基づいて、物理量の計算をすると、容易に無限大が出てくる。では、どのような計算をして無限大が出てくるかということ、3次元空間中の相対論的な場の量子論を考えると、基本的には以下の積分

$$I_{p,q}(M^2) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} \frac{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^p}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - M^2 + i\epsilon)^q} \quad (6.35)$$

を実行することから出てくる。ここで、 $\mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$ として、 $k^2 = -\omega^2 + \mathbf{k}^2$ という記法を用いた。

さて、被積分関数に現れる ω^2 と \mathbf{k}^2 の符号が揃っていないため、このままでは少し計算がやりにくい。そこで、 \mathbf{k} を固定して被積分関数を ω の関数としてみると、被積分関数は $\omega = \pm\sqrt{M^2 + \mathbf{k}^2 - i\epsilon}$ に極を持つことに注目しよう。すると、式 (4.36) の導出とまったく同じ変形を行うことができ、上の積分は

$$I_{p,q}(M^2) = i(-1)^{p-q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2)^p}{(k^2 + M^2)^q} \quad (6.36)$$

と表すことができる。ここで、 $d^4k := dk^0 d^3k$ 、 $k^2 := (k^0)^2 + \mathbf{k}^2$ という表記を導入した。この積分の書き換えを〈**ウィック回転**〉と呼んだりする。書き換えた後の被積分関数は k^2 のみ関数になっているので、式 (6.14) と式 (6.18) で $n = 4$ としたときの結果を用いると

$$I_{p,q}(M^2) = i(-1)^{p-q} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4 \Gamma(2)} \int_0^\infty dk \frac{k^{2p+3}}{(k^2 + M^2)^q} = \frac{i(-1)^{p-q}}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^{2p+3}}{(k^2 + M^2)^q} \quad (6.37)$$

と 1次元積分まで簡単化することができる。では、この簡単な場合にこの積分が発散することを確認しておこう。

例. いま、簡単な場合として $(p, q) = (0, 1)$ の場合を考えてみよう。このとき、上の結果を用いると

$$I_{p,q}(M^2) = \frac{i(-1)}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{k^2 + M^2} \quad (6.38)$$

いま、 k が十分大きく $k \gg M$ を満たす領域で被積分関数は $\frac{k^3}{k^2 + M^2} \sim k$ とふるまう。したがって、十分大きな k の領域で発散が出るのが期待される。あるいは、いまの場合は簡単に積分が実行できるので、積分の上端を $\Lambda \rightarrow \infty$ と表すと

$$\begin{aligned} I_{p,q}(M^2) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [k^2 - M^2 \log(k^2 + M^2)]_{k=0}^{k=\Lambda} \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\Lambda^2 + M^2 \log \frac{M^2}{M^2 + \Lambda^2} \right] \\ &= \infty \end{aligned} \quad (6.39)$$

というように、 Λ^2 に比例する発散が現れることがわかる。

さて、物理量に対応する積分がこのように発散してしまうのは困りものである。そこで、場の量子論を研究していた物理学者たちは〈**正則化 (regularization)**〉と呼ばれる「無限大を有限にしておく」といういろい

るな計算方法を考えた。代表的な手法は大雑把に (1) 積分範囲の上端をいじる, (2) 比積分関数をいじる, (3) 積分の次元をいじる, という3つである。それぞれの方法の名前と, 基本的な考え方を列挙すると以下の通りである:

(1) カットオフ正則化 (cutoff regularization):

積分の上端を $\Lambda \rightarrow \infty$ を取ると発散するので, Λ は大きい有限な量としておこう。

(2) パウリ・ヴィラス正則化 (Pauli-Villars regularization):

この被積分関数のままだと発散するので, 発散を打ち消すように被積分関数を変形しよう。

(3) 次元正則化 (dimensional regularization):

時空の次元を4にすると発散しちゃうので, 時空の次元を4からずらして計算しよう。

ここでは, 一見もっともエキゾチックに見える (3) の〈次元正則化〉を用いて $I_{p,q}(M^2)$ を計算する方法を与えよう。

次元正則化はもとの4次元積分を n 次元積分に置き換えるという計算法である。この方法で実際に発散が抑えられるのを見てみよう。そのためには, 出発点となる式 (6.36) で単純に $d^4k \rightarrow d^n k$ に置き換えればよさそうに思うが, k というのは運動量の次元を持つ量なので, この置き換えをするだけでは計算する物理量の次元もずれてしまう。そこで, 次元がずれないように運動量の次元を持つ未知の量 μ という量を導入して

$$I_{p,q}^n(M^2) = i(-1)^{p-q} \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(k^2)^p}{(k^2 + M^2)^q} \quad (6.40)$$

と置き換える。この場合も被積分関数は k^2 の関数のままなので, n 次元球面の公式を使って変形することができ, 以下が得られる:

$$\begin{aligned} I_{p,q}^n(M^2) &= i(-1)^{p-q} \frac{2\pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2})} \mu^{4-n} \int_0^\infty dk \frac{k^{2p+n-1}}{(k^2 + M^2)^q} \\ &= i(-1)^{p-q} \frac{2\pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2})} \mu^{4-n} \frac{M^{2p+n-1+1}}{M^{2q}} \int_0^\infty dx \frac{1}{2x^{1/2}} \frac{x^{p+\frac{n-1}{2}}}{(1+x)^q} \\ &= i(-1)^{p-q} \frac{1}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} \mu^{4-n} M^{2p+n-2q} \int_0^\infty dx \frac{x^{p+\frac{n}{2}-1}}{(1+x)^q} \end{aligned} \quad (6.41)$$

ここで, 2行目に進む際には $k^2 = M^2 x$ という変数変換を行った。さて, 最終行の積分を眺めてみると, これはベータ関数の定義 (6.20) に他ならないことに気づく。そこで, ベータ関数をガンマ関数で表す式 (6.22) も用いると,

$$\begin{aligned} I_{p,q}^n(M^2) &= i(-1)^{p-q} \frac{1}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} \mu^{4-n} M^{2p+n-2q} B(p+n/2, q-p-n/2) \\ &= i(-1)^{p-q} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \mu^{4-n} M^{2p+n-2q} \frac{\Gamma(p+\frac{n}{2})\Gamma(q-p-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(q)} \end{aligned} \quad (6.42)$$

これが次元正則化において頻繁に使われる公式であるので, まとめておこう

$$I_{p,q}^n(M^2) = i(-1)^{p-q} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \mu^{4-n} M^{2p+n-2q} \frac{\Gamma(p+\frac{n}{2})\Gamma(q-p-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(q)} \quad (6.43)$$

もともとの4次元積分を考える極限は, $n \rightarrow 4$ として得られるが, この極限でガンマ関数の極を拾う形で発散が再現されることがわかる。この公式は場の量子論の計算でよく使われる公式で, 筆者も [2022年に書いた論文](#) で使った。

◇ ゼータ関数

授業の冒頭で書き下した

$$1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12} \quad (6.44)$$

という「まるで意味のわからない公式」について考えてみよう。これを理解するためにまず、〈リーマンのゼータ関数〉 $\zeta(z)$ を次式で定義する：

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad \text{with } \operatorname{Re} z > 1 \quad (6.45)$$

ゼータ関数に現れる無限和は、 $\operatorname{Re} z \geq R$ を満たす $R > 1$ について

$$|n^{-z}| = n^{-\operatorname{Re} z} \leq n^{-R} \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-R} < \infty \quad \text{with } n \in \mathbb{N} \quad (6.46)$$

が成立することから、 $\operatorname{Re} z > 1$ で絶対収束する。これより、上の式で定義されたゼータ関数は $\operatorname{Re} z > 1$ で正則関数を与えることがわかる。そうすると仮にゼータ関数について $z = -1$ まで含むように解析接続が定義できたとすると、おかしな公式の左辺の無限和は

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots \quad (6.47)$$

と $\zeta(-1)$ として理解することができそうである。

ゼータ関数の解析接続と $\zeta(-1)$ を調べる前に、すでに確実に定義された $z = 2, 4, \dots$ における値

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \\ \zeta(4) &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \end{aligned} \quad (6.48)$$

を考えてみよう。これらの無限和に対応する量は、物理の計算においてよく出てくる。具体的には、量子統計力学などでは

$$h(2m) := \int_0^{\infty} dt \frac{t^{2m-1}}{e^t - 1} \quad \text{with } m \in \mathbb{N} \quad (6.49)$$

という積分がよく現れる。⁴ この積分に含まれる被積分関数について、 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ というテイラー展開を施し、積分と無限和の順序の交換・変数変換などを用いて変形していくと、

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^z} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \\ &= \zeta(z) \Gamma(z) \end{aligned} \quad (6.50)$$

と表せることがわかる。したがって、 $\operatorname{Re} z > 0$ の領域でゼータ関数は

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} h(z) \quad \text{with } h(z) := \int_0^{\infty} dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (6.51)$$

という積分形で表せることがわかった。したがって、 $m \in \mathbb{N}$ について $\zeta(2m)$ の値がわかれば、物理の計算に必要な積分 $h(2m)$ が求まる。

そこで、被積分関数に現れた $\frac{1}{e^z - 1}$ という関数に注目してみる。この関数はこれまでに演習問題で何回か扱ってきたが、この関数の展開係数から定義される量をここで導入しておこう。

⁴たとえば、 $h(4)$ は電磁場のもつエネルギーと温度の関係を表す関係式（シュテファン=ボルツマンの法則）を示す際に現れる。

ベルヌーイ数：関数 $\frac{1}{e^z - 1}$ はこれまでに見たように、 $z = 0$ に 1 位の極を持つ。そこで、この 1 位の極を打ち消すために、 z 倍した関数を考える。この関数を $z = 0$ まわりで展開したものを

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (6.52)$$

と表し、展開係数に現れた B_n を**ベルヌーイ数**と呼ぶ。具体的にテイラー展開を行って初めの数項を求めると

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \dots \quad (6.53)$$

と求まる。ここで、 $B_3 = B_5 = 0$ となっているが、展開する前の式に B_1 からくる項を足すと

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z e^z + 1}{2 e^z - 1} = \frac{z e^{z/2} + e^{-z/2}}{2 e^{z/2} - e^{-z/2}} \quad (6.54)$$

と表され、右辺が z の偶関数になっていることから、 $n \geq 1$ の整数について $B_{2n+1} = 0$ が成立することがわかる。したがって、

$$\frac{z e^{z/2} + e^{-z/2}}{2 e^{z/2} - e^{-z/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (6.55)$$

という式が得られる。この式で $z \rightarrow 2\pi iz$ と代入してやると、次の式が得られる：

$$\pi iz \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \pi z \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (-1)^n (2\pi)^{2n} z^{2n} \quad (6.56)$$

では、以上の準備に基づいて $\zeta(2m)$ を表す式を導出しよう。そのために、上の式 (6.56) に現れた $\cot \pi z := \cos \pi z / \sin \pi z$ という関数を考えてみる。この関数は分母に $\sin \pi z$ がいることからわかるように、 $z = n \in \mathbb{Z}$ に 1 位の極を持ち、その留数は $1/\pi$ である。この結果に着目すると、 $\cot \pi z$ を特異点の寄与を足し上げたものとして、以下のように表せることを示すことができる：

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (6.57)$$

したがって、この式の両辺を z 倍したものと式 (6.56) を比較することで

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} (-1)^m (2\pi)^{2m} z^{2m} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z/n)^2}{1 - (z/n)^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2(m+1)} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} z^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \\ &= 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m) z^{2m} \end{aligned} \quad (6.58)$$

が得られる。よって、両辺の z^{2m} の係数を比較することで

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} B_{2m} \quad \text{with } m = 1, 2, \dots \quad (6.59)$$

という公式が得られる。よって、 $m = 1, 2$ の場合について、ベルヌーイ数に関して求めてある結果 (6) を用

いると以下の結果が求まる：

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \frac{(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} B_2 = \frac{\pi^2}{6} \\ \zeta(4) &= -\frac{(2\pi)^4}{2 \cdot 4!} B_4 = \frac{\pi^4}{90}\end{aligned}\tag{6.60}$$

では、次に $\operatorname{Re} z \leq 1$ におけるゼータ関数の解析接続を与えて、 $\zeta(-1)$ を求めに行こう。ゼータ関数の解析接続はいろいろな方法で与えることができるが、ここではリーマン自身によって与えられた積分表示による解析接続を与える。そのためにまず、図 22 に与えたハンケルの積分経路に沿った次の積分を考えてみよう：

$$G(s) := \int_C dz e^{-z} (-z)^{s-1}, \quad H(s) := \int_C dz \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\tag{6.61}$$

いま、 $H(s)$ の被積分関数について、先ほどと同じく $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ というテイラー展開を用いて変形すると

$$\begin{aligned}H(s) &= \int_C dz (-z)^{s-1} \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} = \int_C dz (-z)^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \int_C dz e^{-z} (-z)^{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \int_C dz e^{-z} (-z)^{s-1} \\ &= \zeta(s) G(s)\end{aligned}\tag{6.62}$$

と表すことができる。一方、ハンケルの経路は実軸の上側と下側と原点周りの小さな円の 3 つに分解できるので、この分解を行ってから、積分変数の取り替えを用いると

$$\begin{aligned}G(s) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{\infty+i\epsilon}^{i\epsilon} dz e^{-z} (-z)^{s-1} + \int_{|z|=\epsilon} dz e^{-z} (-z)^{s-1} + \int_{-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} e^{-z} (-z)^{s-1} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\underbrace{\int_{-\infty+i\epsilon}^{i\epsilon} dz e^z z^{s-1} - \int_{-\infty-i\epsilon}^{-i\epsilon} dz e^z z^{s-1}}_{(A)} + \underbrace{(-1)^{s-1} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint_{|z|=\epsilon} dz e^{-z} (-z)^{s-1}}_{(B)} \right]\end{aligned}\tag{6.63}$$

と変形できる。いま、 (B) は円周に沿った閉じた積分を与えるが、被積分関数は正則なので $(B) = 0$ が得られる。一方、 (A) の 2 項は被積分関数に $z + i\epsilon$ と $z - i\epsilon$ を代入したものの差を与えているが、 $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を取る際に、累乗関数 z^{s-1} について注意が必要になる。実際、正則関数の例を議論したときに累乗関数は、 $\operatorname{Re} z < 0$ の領域で式 (2.70) のような不連続性を持つことを議論したのだった。そこで、上式の (A) の部分に式 (2.70) を用いてやると、

$$\begin{aligned}(A) &= \int_{-\infty}^0 dz e^z |z|^{s-1} 2i \sin[(s-1)\pi] = 2i \sin[(s-1)\pi] \int_{-\infty}^0 dz e^z |z|^{s-1} \\ &= 2i \sin[(s-1)\pi] \int_0^{\infty} dz e^{-z} z^{s-1} \\ &= 2i \sin[(s-1)\pi] \Gamma(s)\end{aligned}\tag{6.64}$$

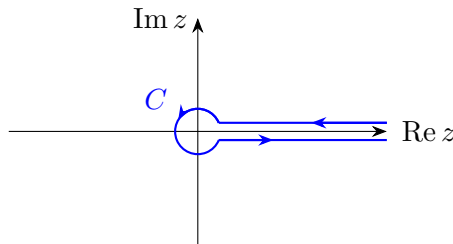


図 22. ハンケルの積分経路.

が得られる。最終行ではガンマ関数の定義式 (6.4) を用いた。さらに、得られた結果に公式 (6.23) を用いると

$$G(s) = -2i \sin[(1-s)\pi] \Gamma(s) = -\frac{2\pi i}{\Gamma(1-s)} \quad (6.65)$$

と変形できる。したがって、この結果を式 (6.62) に代入すると、ゼータ関数に関する次の積分表示が得られる：

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C dz \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \quad (6.66)$$

この式の右辺がゼータ関数の解析接続を与えている。

さて、以上の準備に基づき、ゼータ関数の値を求める公式を導出しよう。まず、「ありえない公式」を見るために、ゼータ関数の負の整数での値を見に行くと $n \in \mathbb{N}$ として

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= (-1)^n \frac{\Gamma(1+n)}{2\pi i} \int_C dz \frac{z^{-n-1}}{e^z - 1} = (-1)^n n! \int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{-n-1}}{e^z - 1} \\ &= (-1)^n n! \oint_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{-n-1}}{e^z - 1} \end{aligned} \quad (6.67)$$

が得られる。2行目に進む際に、被積分関数は正の実軸上で不連続性を持たないことを用いて、ハンケル経路の円周上からの寄与のみを拾えばよいことを用いた。あとは被積分関数にベルヌーイ数を用いた展開を代入し、留数定理を用いると

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \oint_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} z^{k-n-2} = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \delta_{k-n-2,-1} \\ &= (-1)^n n! \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \\ &= (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \end{aligned} \quad (6.68)$$

が得られる。したがって、次の結果が得られたことになる：

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \quad \text{with } n \in \mathbb{N} \quad (6.69)$$

この結果で $n = 0, 1$ とすると

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= 1 + 1 + 1 + \dots = B_1 = -\frac{1}{2} \\ \zeta(-1) &= 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12} \end{aligned} \quad (6.70)$$

などの「ありえない公式」たちが得られる。このような公式は、場の量子論や弦理論などでよく用いられる式になっている。

最後に「ありえない公式」がなぜ問題ないのか注意しておく。そのためには、上の議論によって示されたのは、

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \dots \quad (6.71)$$

という結果に過ぎないことに注目すればよい。もともとのゼータ関数の定義式 (6.45) に基づくと、この式の左辺を上で与えたように

$$\zeta(-1) \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 3 + \dots \quad (6.72)$$

という等号を書きたくなる。しかし、もともとのゼータ関数の定義式 (6.45) は $\text{Re } z > 1$ のみで正しかったので、この点に注意をせずに値を代入するのはまずい。 $z = -1$ における値 $\zeta(-1)$ はあくまで $\text{Re } z > 1$ での定義されていたゼータ関数を $\text{Re } z \leq 1$ まで解析接続した関数 $\zeta(z)$ の出す値であるので、この点に注意を払わずにもともとの $\text{Re } z > 1$ でのみ許されていた表式に代入したことが一見「ありえない公式」が得られた原因になっている。

余談. 物理学者の数学力: この節では、テイラー展開・ $\cot \pi z$ の無限和の表式や解析接続・複素積分を駆使してゼータ関数の値 $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(-1)$ を読み取りに行った。ハンケル経路に沿った積分など、考えるべき量が天下り式に導入されていることもあり、むずかしく感じることもあったかと思う。では、研究現場にいる理論物理学者は実際にこのような結果をサクサク計算・導出しながら、研究をしているのだろうか？ 自分の経験に即して答えると、この問いに対する回答は「NO!」であり、(標準的な)理論物理学者の多くはこのような計算をスラスラできないのが現実だと思う^a。

では、現場の物理学者はどう研究をしているのかというと、「まずはとにかく計算機の力を借りてみる」という形で形で計算をすることが多い。2024年現在、物理の研究現場では、**Mathematica** のような数式処理ソフトが日常的に用いられている。このため、自分の研究で必要な物理量を求めようとした結果、ちょっとめんどろな微分・積分や、たとえば $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(-1)$ などの量が必要になったとき、まずはそれらを数式処理ソフトに放り込んで答えが出るかを確認する(少し時代を遡ると、数式処理ソフトを使う代わりに数学公式集を使っていたことだろう)。実際、筆者自身 $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ となることは前から知っていたが、この講義の準備のために、自分の手ではじめて導出した。数学的結果をすべて自分で出さ(せ?)なくても、現代物理の研究はできるのである。

ただし、すべての計算を数式処理ソフトに任せられるかということ、まだそこまで便利な時代にはなっていないことにも注意が必要である。実際、いまのところ留数定理を使った積分などはまだ自分の手で必要になる量を求める必要がある。

また、余談ついでに物理学科の大学2-3年生の頃にかかる可能性がある「大二病」について触れておく。これは典型的には「現代数学がわかれば現代物理がわかるはずだ!」というような症状が現れるもので、筆者も大学3年生あたりの頃に当然のように罹患した。具体的には現代数学の中でも幾何学分野に属する多様体論について学習することで、一般相対論を中心に現代物理が理解できるだろう! という意気込みで、友人と自主ゼミなどをやった。いまになって振り返ると、数学の勉強はそれ自身として楽しめるものだと思うし、実際にそのような勉強をする時間が持てるのは学生の特権だと思うのでとてもよいことである。しかし、やはり現代物理を理解するにはいささか遠回りと言わざるを得ない。当たり前のことだが、現代物理を理解するには現代物理を勉強するのが一番の近道である。

^a[注] あくまで個人の感想です。

7 授業のまとめ

はじめの節で述べたように、この授業では来年度以降に習う現代物理の学習準備のために、物理で必要になる複素関数論の基礎を学んだ。講義を通して習得すべきとしていた課題をもう一度以下に載せる：

- (i) 複素数の四則演算など、基本的な計算規則を使いこなせるようにする (2 コマ)。
- (ii) 複素関数の微分が実行でき、正則関数の定義や性質を理解する (3 コマ)。
- (iii) 複素関数の積分定理を理解し、実際の計算 (とくに留数積分) を実行できるようなる (5 コマ)。
- (iv) 複素関数の級数展開 (ローラン展開) を実行できるようになる (2 コマ)。
- (v) (できれば) 解析接続やリーマン面の概念を理解する (3 コマ)。
- (vi) ガンマ関数や鞍点法などの複素関数の応用を理解する (?コマ)。

複素関数論の中で、理論物理の研究でもっとも大事な事項の1つは〈留数定理と積分経路の変形による積分計算の能力〉である。素粒子理論・原子核理論・物性理論のどの研究室に配属されても、グリーン関数を用いた摂動計算を行うことになったら、留数積分ができるかは確実に問われるようになる。問題はこのような計算を自分でやる必要が出てくるのは、おそらく学部4年の後期から大学院に入った後くらいで、かなり後の話になってしまうという点である。おそらく具体的に出くわすのは1年以上後になるが、そのときにこの授業で習ったことを忘れないでいてくれるとうれしい。

期末試験について

- 日時：2024年2月5日, 3限 (12:55-14:25)
- 試験範囲：複素関数の授業で扱った内容。とくに、演習問題で扱ったような複素数の定義・計算, 複素関数の微分とコーシー・リーマンの関係式, 複素積分, 留数定理の応用, ローラン展開あたりをよく復習しておくこと。
- その他：ノート教科書などの持ち込みは不可